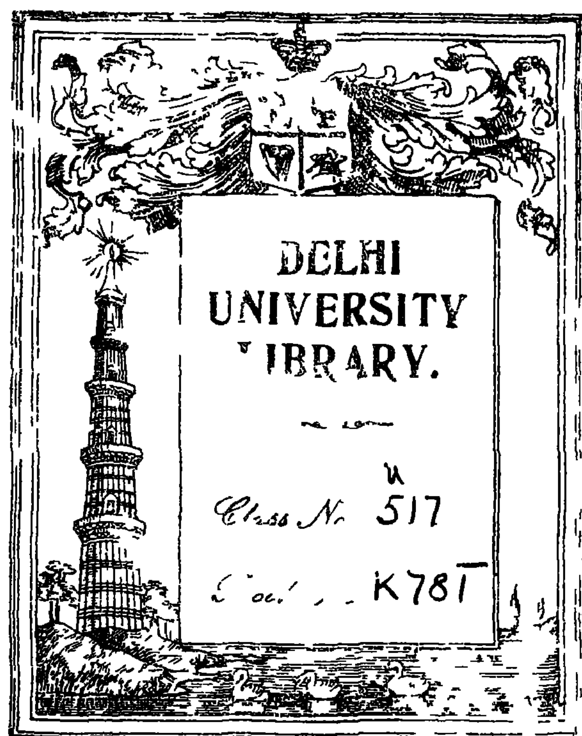
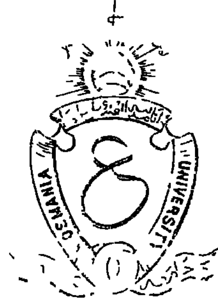

DELHI
UNIVERSITY
LIBRARY.
Class No. 517
K78T






سلسلۂ نصابات علمیہ جامعۂ عثمانیہ

# تفرقی و تکملی احصا

(برائے انٹرمیڈیٹ)

تصنیف

کشن چند و رضی الدین صدیقی

پروفیسرانِ ریاضی جامعۂ عثمانیہ

سنہ ۱۳۵۸ھ م سنہ ۱۳۴۸ف م سنہ ۱۹۳۹ء

دارالطبع جامعۂ عثمانیہ سرکارِ عالی حیدرآباد دکن

# دیباچہ

جدید اور اعلیٰ ریاضی سے واقفیت حاصل کرنے کے لیے تفرقی اور تکملی احصا کا علم ناگزیر ہے۔ اس احصا کی اہمیت صرف نظری ریاضی ہی میں نہیں ہے بلکہ موجودہ زمانے میں ریاضی کا جو استعمال علمِ حرکت، علمِ ہیئت، طبیعیات، کیمیا، انجینیری اور دوسرے علومِ طبیعی و عمرانی میں ہوتا ہے اس کا بھی زیادہ تر دارو مدار اسی علمِ احصاء پر ہے۔ چنانچہ جامعۂ عثمانیہ نے ریاضی کی تعلیم کے جدید رجحان کے مطابق اس مضمون کو انٹرمیڈیٹ کے ریاضی کے نصاب میں شامل کیا تاکہ جامعاتی تعلیم کی ابتداء ہی سے طلباء کو ریاضی کی اس اہم ترین شاخ سے واقفیت ہو جائے۔

یہ کتاب اُن طلباء کی خاطر لکھی گئی ہے جو علمِ احصاء کا بالکل پہلی مرتبہ مطالعہ کر رہے ہیں۔ چونکہ اس علم میں انتہا کا موضوع سب سے زیادہ اہم ہے اور سارے علمِ احصاء کا انحصار اسی پر ہے، اس لیے انتہا کے مفہوم کو پہلے اور دوسرے باب میں نہایت تفصیل اور وضاحت کے ساتھ بیان کیا گیا ہے۔ استاد اور طالب علم دونوں کی یہ کوشش ہونی چاہیے کہ جب تک انتہا کا مفہوم اچھی طرح ذہن نشین نہ ہو جائے آگے نہ بڑھیں۔

انٹرمیڈیٹ کے نصاب کا لحاظ رکھتے ہوئے ہم نے صرف اس پر اکتفا کیا ہے کہ مختلف تفاعلوں کو تفرق اور تکمل کرنے کے قاعدے بیان

کرنے میں اگرچہ چھٹے باب میں تفرقی سر کے ایک دو استعمال بھی مختصر طور پر بتائے گئے ہیں ۔ اس بات کی کوشش کی گئی ہے کہ یہ کتاب اپنے حدود کے اندر مکمل ہو ۔ یہ مقصد دو طرح سے حاصل ہوا ہے : ایک تو یہ کہ جو تعریفیں اور ثبوت دیے گئے ہیں وہ ریاضیاتی نقطۂ نظر سے باضابطہ اور صحیح ہیں اور اعلیٰ جماعتوں میں بھی کام دے سکتے ہیں ۔ علم احصاء کی ابتدائی کتابوں میں عموماً یہ نقص ہوتا ہے کہ مبہم طور پر ہندسی شکلوں کی مدد سے بتا دیا جاتا ہے کہ مسئلہ کا صحیح ہونا قرین قیاس ہے [illegible] باضابطہ ثبوت دینے کے طالب علم کے وجدان سے اپیل [illegible] ہی دیے جاتے ہیں جو کسی طریقہ سے [illegible] اس سے طالب علم میں غلط استدلال [illegible] اور آگے چل کر صحیح استدلال کو اخذ کرنے میں دقت ہوتی ہے ۔ ریاضی کی تعلیم کے جدید نظریہ کے بموجب یہ طریقہ قطعی نامناسب ہے ۔ ریاضی کے کسی موضوع کے غلط پڑھانے کی بہ نسبت اس کا نہ پڑھانا زیادہ بہتر ہے ہم نے اس کتاب میں کہیں ایسے ثبوت نہیں دیے ہیں جن کو آگے چل کر بھلا دینا پڑے ۔ اگر بعض مقاموں پر ہندسی شکلوں سے مدد لی گئی ہے تو ان کے ساتھ باضابطہ ثبوت بھی دیے گئے ہیں ۔

دوسرے یہ کہ جن عنوانوں پر بحث کی گئی ہے ان کے متعلق تمام ضروری امور بتا دیے گئے ہیں تاکہ پھر انہیں [illegible] اعلیٰ جماعتوں میں دوبارہ بحث کی ضرورت باقی نہ رہے ۔ مثلاً انتہا ، تسلسل ، الجبری ، مثلثی ، لوگارثمی اور قوت نمائی تفاعلوں اور ان سے مرکب تفاعلوں کو تفرق کرنے کے طریقوں پر قطعی مکمل بحث کی گئی ہے ۔ اسی طرح معیاری تکملوں ، تکملوں میں متغیر کی تبدیلی اور تکمل بالحصص کا بھی کم و بیش مکمل طور پر ذکر کیا گیا ہے ۔ آخر میں تفاعلوں کی اعظم اور اقل قیمتوں اور منحنیوں کے تماس و انحنا کو واضح طور پر بیان کیا گیا ہے ۔

ہم ان تمام حضرات کے متشکر ہیں جن کے مفید مشوروں سے ہم نے اس کتاب کی تحریر کے وقت استفادہ کیا۔ ہم سررشتۂ تالیف و ترجمہ کے ارباب کے بھی شکر گزار ہیں جن کی مدد اور کوشش کی وجہ سے کتاب کی طباعت میں بہت سہولت ہوئی۔ فقط

کشن چند
رضی الدین صدیقی

# فہرست مضامین

## احصائے تفرقی و تکملی

| مضامین | صفحات |
|---|---|
|  | ۹ |

| مضامین | صفحات |
| --- | --- |

| مضامین | صفحات |
| --- | --- |
| توضیحی مثالیں | ۱۳۹ |
| مشقی سوالات (۱۹) | ۱۴۰ |
| ۳، ۹ —— جزوی مشتق | ۱۴۲ |
| توضیحی مثالیں | ۱۴۴ |
| مشقی سوالات (۲۰) | ۱۴۴ |
| باب سوم پر متفرق سوالات | ۱۴۵ |
| باب چہارم : تفرقی سر کے اطلاقات | ۱۴۹ |
| ۴، ۱ —— تفرقی سر کا استعمال | ۱۴۹ |
| ۴، ۲ —— منحنی کا ڈھال، مماس اور عماد کی مساواتیں، وغیرہ | ۱۴۹ |
| مشقی سوالات (۲۱) | ۱۵۳ |
| ۴، ۲۵ — منحنی کے قوس کا طول | ۱۵۷ |
| ۴، ۳ —— منحنی کی متبدل مساوات | ۱۵۹ |
| ۴، ۴ —— قطبی محددوں میں منحنی کا ڈھال | ۱۶۱ |
| ۴، ۴۵ — قطبی محددوں میں قطبی زیر مماس اور قطبی زیر عماد کا طول | ۱۶۴ |
| ۴، ۶ —— الجبرا میں تفرقی سر کا استعمال | ۱۶۷ |
| ۴، ۷ —— اعظم اور اقل قیمتیں | ۱۷۰ |

بسم اللہ الرحمٰن الرحیم

# احصائے تفرقی و تکملی

## باب اوّل

## تفاعل اور انتہا

### ۱۔۱۔ اعداد۔

۱۔۱۔۱۔ نہ صرف ابتدائی ریاضی میں بلکہ روزمرّہ زندگی میں بھی ہم کو عددوں سے اکثر سابقہ پڑتا ہے اور اس لیے بحث کی ابتدا میں ہم مان لیتے ہیں کہ طالب علم کو ابتدائی ریاضی کے اعداد یعنے اعداد صحیح اور کسر سے خواہ وہ مثبت ہوں یا منفی، کافی واقفیت ہے۔

اعداد کی اس جماعت کو جس میں تمام صحیح اور کسور، مثبت اور منفی عدد شامل ہوں ہم اعداد کی "منطق" جماعت کہتے ہیں اور اس جماعت کے کسی فرد کو "منطق" عدد کہتے ہیں۔ ابتدائی ریاضی سے ہمیں یہ معلوم ہے کہ یہ منطق جماعت ذیل کی خاصیتیں رکھتی ہے:—

(۱) کسی دو منطق عددوں کا حاصل جمع ایک منطق عدد ہے۔

(۲) کسی دو منطق عددوں کا فرق ایک منطق عدد ہے۔

(۳) کسی دو منطق عددوں کا حاصل ضرب ایک منطق عدد ہے۔

(۴) کسی دو منطق عددوں کا خارج قسمت ایک منطق عدد ہے۔

ایک منطق عدد کو عام سے عام طور پر $\frac{ف}{ق}$ کی شکل میں لکھ سکتے ہیں جس میں ہم مان لیتے ہیں کہ ف اور ق مثبت یا منفی صحیح عدد ہیں۔

۱۲ا۔ اکثر اوقات ہم کو ایسے عددوں سے بھی سابقہ پڑتا ہے جو منطق نہیں ہیں یعنے جو ایک کسر $\frac{ف}{ق}$ کی شکل میں کبھی نہیں تعبیر کیے جا سکتے۔ اس کی ایک آسان مثال کے طور پر ہم اُس عدد پر غور کرتے ہیں جس کا مربع ۲ ہے یعنے بالفاظِ دیگر ہم ۲ کے جذر المربع پر غور کرتے ہیں جس کو بالعموم $\sqrt{۲}$ لکھا جاتا ہے۔ بفرضِ محال ہم مان لیتے ہیں کہ

$\sqrt{۲} = \frac{ف}{ق}$ جہاں ہم یہ فرض کر سکتے ہیں کہ ف اور ق دو مثبت صحیح عدد ہیں جن میں کوئی مشترک جزوِ ضربی نہیں ہیں ورنہ ہم انہیں تقسیم کے ذریعہ خارج کر دیتے۔

$$\text{پس}\quad \frac{ف^۲}{ق^۲} = ۲ \quad \text{یعنے}\quad ف^۲ = ۲ق^۲ \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

اس سے ظاہر ہے کہ $ف^۲$ ایک جفت عدد ہے۔ اس لیے ف بھی ایک جفت عدد ہونا چاہیے کیونکہ کسی طاق عدد کا مربع جفت نہیں ہو سکتا۔

$$\text{پس}\quad ف = ۲م \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

جہاں م کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔ اس کو مساوات (۱) میں درج کرنے پر حاصل ہوتا ہے کہ

$$۲ق^۲ = ف^۲ = (۲م)^۲ = ۴م^۲$$

$$\text{یعنے}\quad ق^۲ = ۲م^۲ \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

مساوات (۳) سے ظاہر ہے کہ $ق^۲$ بھی ایک جفت عدد ہے اور اس لیے ق بھی ایک جفت عدد ہے

$$ق = ۲ ن \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۴)$$

جہاں ن ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

مساواتوں (۲) اور (۴) سے ظاہر ہے کہ ف اور ق میں ایک مشترک جزوِ ضربی ۲ ہے جو مفروض کے خلاف ہے۔ $\sqrt{۲}$ کو ایک منطق عدد $\frac{ف}{ق}$ کے مساوی ماننے کی وجہ سے یہ تضاد حاصل ہو رہا ہے اس لیے یہ نتیجہ ہم اخذ کرتے ہیں کہ $\sqrt{۲}$ کوئی منطق عدد نہیں ہے یعنے $\sqrt{۲}$ کو ہم ایک کسر عام یا ایک محدود کسر اعشاریہ کی شکل میں تعبیر نہیں کر سکتے۔ صرف $\sqrt{۲}$ ہی ایک ایسا عدد نہیں ہے بلکہ ایسے بے شمار عدد ہیں جو ایک کسر عام یا ایک محدود کسر اعشاریہ کی شکل میں نہیں لکھے جاسکتے۔ ان کی چند مثالیں $\sqrt{۳}$، $\sqrt[۳]{۲}$، $\sqrt{۲} + \sqrt{۵}$ وغیرہ ہیں۔

ایسے تمام اعداد کو جو منطق نہیں ہیں یعنے ایک کسر $\frac{ف}{ق}$ کی شکل میں نہیں لکھے جاسکتے ہم "غیر منطق اعداد" کہتے ہیں۔ عددوں کی وہ جماعت جس میں تمام منطق عدد اور تمام غیر منطق عدد شامل ہیں "اعداد کی حقیقی جماعت" کہلاتی ہے اور اس جماعت کے کسی فرد کو ہم "حقیقی عدد" کہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ ایک حقیقی عدد منطق یا غیر منطق کچھ ہی ہو سکتا ہے۔

غیر منطق عددوں کی دو بڑی قسمیں ہوتی ہیں:- ایک وہ غیر منطق عدد جن کی مثالیں اوپر دی جاچکی ہیں یعنے $\sqrt{۲}$، $\sqrt[۳]{۲}$ وغیرہ۔ ظاہر ہے کہ $\sqrt{۲}$ جبری مساوات $لا^۲ - ۲ = ۰$ کی ایک اصل ہے۔ اسی طرح $\sqrt[۳]{۲}$ جبری مساوات $لا^۳ - ۲ = ۰$ کی ایک اصل ہے۔ وہ غیر منطق عدد جو کسی جبری مساوات کی اصلیں ہوں خواہ یہ مساوات کسی درجہ کی ہو ان عددوں کو جبری عدد کہتے ہیں۔ پس $\sqrt{۲}$، $\sqrt[۳]{۲}$ وغیرہ جبری عدد ہیں۔ لیکن بعض غیر منطق عدد ایسے ہیں جو کسی جبری مساوات کی اصل نہیں ہیں مثلاً $\pi$

یعنے کسی دائرہ کے محیط اور قطر کی نسبت ، ایک غیر منطق عدد ہے جو کسی جبری مساوات کی اصل نہیں ہے۔ ایسے عددوں کو "ماورائی عدد" کہتے ہیں۔ آگے چل کر طالب علم کو اور دوسرے ماورائی عددوں سے سابقہ پڑیگا۔

**۱۳ر۱** — ہم ایک خطِ مستقیم لیتے ہیں جس کو ہم دونوں طرف جس قدر چاہیں خارج کیا ہوا مان لیتے ہیں۔ اس خط پر ہم کوئی نقطہ $ا_{0}$ مقرر کر لیتے ہیں اور $ا_{0}$ سے کسی مناسب پیمانہ پر ایک حصہ $ا_{0}ا_{1}$ کاٹ لیتے ہیں۔

$ا_{-م-1}$ ، $ا_{-م}$ ، $ا_{-1}$ ، $ا_{0}$ ، $ا_{1}$ ، $ا_{2}$ ، $ا_{ن}$ ، $ا_{ن+1}$

نقطہ $ا_{0}$ کو ہم صفر سے اور $ا_{1}$ کو ۱ سے تعبیر کرتے ہیں۔

اب اس خط پر ہم بہت سے نقطے

$$\ldots ، ا_{-م-1} ، ا_{-م} ، \ldots ، ا_{-1} ، ا_{0} ، ا_{1} ، \ldots ، ا_{ن} ، ا_{ن+1}$$

ایسے معین کرتے کہ اگر ان حصّوں کو بائیں جانب سے سیدھی جانب ناپا جائے تو

$$\ldots = ا_{-م-1}ا_{-م} = \ldots = ا_{-1}ا_{0} = ا_{0}ا_{1} = \ldots ا_{ن}ا_{ن+1} = \ldots$$

تب ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو

$$\frac{ا_{0}ا_{ن}}{ا_{0}ا_{1}} = ن \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

اب ہم یہ مان لیتے ہیں کہ طول ایک ایسی مقدار ہے جس کی علامت مثبت ہوتی ہے اگر طول کو بائیں سے سیدھی جانب ناپا جائے اور جس کی علامت منفی ہوتی ہے اگر طول کو سیدھی سے بائیں جانب ناپا جائے یعنے $ا_{0}ا_{1}$ مثبت اور $ا_{1}ا_{0}$ منفی جس سے ملتا ہے کہ $ا_{0}ا_{1} = - ا_{1}ا_{0}$ ۔ پس

$$\frac{\text{ا}_0\,\text{ا}_{-\text{ن}}}{\text{ا}_0\,\text{ا}_1} = -\frac{\text{ا}_{-\text{ن}}\,\text{ا}_0}{\text{ا}_0\,\text{ا}_1} = -\text{ن}$$

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ مساوات (۱) ن کی تمام مثبت یا منفی صحیح عددی قیمتوں کے لیے درست ہے۔

اب ہم ایک مثبت کسرِ واجب $\frac{\text{ف}}{\text{ق}}$ لیتے ہیں اور مان لیتے ہیں کہ ف اور ق ایسے مثبت صحیح عدد ہیں جن میں کوئی مشترک جزوِ ضربی نہیں ہے اور ف < ق۔ طول $\text{ا}_0\text{ا}_1$ کو ہم ق مساوی حصّوں میں تقسیم کرتے ہیں تو ظاہر ہے کہ ان نقاطِ تقسیم کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے:-

$$\text{ا}_0 ،\ \text{ا}_{\frac{1}{\text{ق}}} ،\ \text{ا}_{\frac{2}{\text{ق}}} ،\ \dots ،\ \text{ا}_{\frac{\text{ف}}{\text{ق}}} ،\ \dots ،\ \text{ا}_{\frac{\text{ق}-1}{\text{ق}}} ،\ \text{ا}_1$$

اس سے ہم فوراً دیکھتے ہیں کہ

$$\frac{\text{ا}_0\,\text{ا}_{\frac{\text{ف}}{\text{ق}}}}{\text{ا}_0\,\text{ا}_1} = \frac{\text{ف}}{\text{ق}} \quad \dots\dots\dots \quad (۲)$$

اس طرح سے ہم کو خطِ مستقیم پر وہ تمام نقطے مل جاتے ہیں جو کسورِ واجب $\frac{\text{ف}}{\text{ق}}$ کو تعبیر کرتے ہیں۔

غیر واجب کسروں کو ہم $(\text{ن} + \frac{\text{ف}}{\text{ق}})$ کی شکل میں لکھ سکتے ہیں جس میں ن ایک مثبت صحیح عدد اور $\frac{\text{ف}}{\text{ق}}$ ایک کسرِ واجب ہے۔ اگر ہم خط پر ایک نقطہ $\text{ا}_{\text{ن}+\frac{\text{ف}}{\text{ق}}}$ نقاط $\text{ا}_{\text{ن}}$ اور $\text{ا}_{\text{ن}+1}$ کے درمیان اس طرح لیں کہ

یعنی کسی دائرہ کے محیط اور قطر کی نسبت ' ایک غیر منطق عدد ہے جو کسی جبری مساوات کی اصل نہیں ہے ۔ ایسے عددوں کو "ماورائی عدد" کہتے ہیں۔ آگے چل کر طالب علم کو اور دوسرے ماورائی عددوں سے سابقہ پڑیگا ۔

**۳ ۱ ر ۱** — ہم ایک خطِ مستقیم لیتے ہیں جس کو ہم دونوں طرف جس قدر چاہیں خارج کیا ہوا مان لیتے ہیں۔ اس خط پر ہم کوئی نقطہ $ا_{۰}$ مقرر کر لیتے ہیں اور $ا_{۰}$ سے کسی مناسب پیمانہ پر ایک حصّہ $ا_{۰}ا_{۱}$ کاٹ لیتے ہیں۔

$ا_{-م-۱}$ ، $ا_{-م}$ ، $ا_{-۱}$ ، $ا_{۰}$ ، $ا_{۱}$ ، $ا_{۲}$ ، $ا_{ن}$ ، $ا_{ن+۱}$

نقطہ $ا_{۰}$ کو ہم صفر سے اور $ا_{۱}$ کو ۱ سے تعبیر کرتے ہیں ۔
اب اس خط پر ہم بہت سے نقطے

$ا_{-م-۱}$ ، $ا_{-م}$ ، ... ، $ا_{-۱}$ ، $ا_{۰}$ ، $ا_{۱}$ ، ... ، $ا_{ن}$ ، $ا_{ن+۱}$ ، ...

ایسے معین کرتے کہ اگر ان حصّوں کو بائیں جانب سے سیدھی جانب ناپا جائے تو

$$... = ا_{-م-۱}ا_{-م} = ... = ا_{-۱}ا_{۰} = ا_{۰}ا_{۱} = ... = ا_{ن}ا_{ن+۱} = ...$$

تب ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو

$$\frac{ا_{۰}ا_{ن}}{ا_{۰}ا_{۱}} = ن \quad \text{.............} \quad (۱)$$

اب ہم یہ مان لیتے ہیں کہ طول ایک ایسی مقدار ہے جس کی علامت مثبت ہوتی ہے اگر طول کو بائیں سے سیدھی جانب ناپا جائے اور جس کی علامت منفی ہوتی ہے اگر طول کو سیدھی سے بائیں جانب ناپا جائے یعنی $ا_{۰}ا_{۱}$ مثبت اور $ا_{۱}ا_{۰}$ منفی جس سے ملتا ہے کہ $ا_{۱}ا_{۰} = -ا_{۰}ا_{۱}$ ۔ پس

$$\frac{\text{ا}_۰\,\text{ا}_{-ن}}{\text{ا}_۰\,\text{ا}_۱} = -\frac{\text{ا}_{-ن}\,\text{ا}_۰}{\text{ا}_۰\,\text{ا}_۱} = -ن$$

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ مساوات (۱) ن کی تمام مثبت یا منفی صحیح عددی قیمتوں کے لیے درست ہے۔

اب ہم ایک مثبت کسرِ واجب $\frac{ف}{ق}$ لیتے ہیں اور مان لیتے ہیں کہ ف اور ق ایسے مثبت صحیح عدد ہیں جن میں کوئی مشترک جزوِ ضربی نہیں ہے اور ف < ق۔ طول $\text{ا}_۰\,\text{ا}_۱$ کو ہم ق مساوی حصّوں میں تقسیم کرتے ہیں تو ظاہر ہے کہ ان نقاطِ تقسیم کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے:۔

$$\text{ا}_۰ ،\ \text{ا}_{\frac{۱}{ق}} ،\ \text{ا}_{\frac{۲}{ق}} ،\ \ldots ،\ \text{ا}_{\frac{ف}{ق}} ،\ \ldots ،\ \text{ا}_{\frac{ق-۱}{ق}} ،\ \text{ا}_۱$$

اس سے ہم فوراً دیکھتے ہیں کہ

$$\frac{\text{ا}_۰\,\text{ا}_{\frac{ف}{ق}}}{\text{ا}_۰\,\text{ا}_۱} = \frac{ف}{ق} \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (۲)$$

اس طرح سے ہم کو خطِ مستقیم پر وہ تمام نقطے مل جاتے ہیں جو کسورِ واجب $\frac{ف}{ق}$ کو تعبیر کرتے ہیں۔

غیر واجب کسروں کو ہم $(ن + \frac{ف}{ق})$ کی شکل میں لکھ سکتے ہیں جس میں ن ایک مثبت صحیح عدد اور $\frac{ف}{ق}$ ایک کسرِ واجب ہے۔ اگر ہم خط پر ایک نقطہ $\text{ا}_{ن+\frac{ف}{ق}}$ نقاط $\text{ا}_ن$ اور $\text{ا}_{ن+۱}$ کے درمیان اس طرح لیں کہ

$\frac{ا\,ا_{ن+\frac{ف}{ق}}}{ا\,ا} = ن + \frac{ف}{ق}$ تو ظاہر ہے کہ $ا\,ا_{ن+\frac{ف}{ق}} = ا\,ا_{\frac{ف}{ق}}$ -

اس طرح اگر ہم ن، ف اور ق کی تمام ممکنہ مثبت صحیح قیمتوں کے لیے نقاط $ا_{ن+\frac{ف}{ق}}$ معلوم کریں تو ہم کو تمام مثبت صحیح یا کسری عددوں س کے جواب میں ایک نقطہ $ا_س$ مل جائیگا جس کے لیے

$$\frac{ا\,ا_س}{ا\,ا} = س \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۳)$$

اب اگر (-س) ایک واجب یا غیر واجب منفی کسر ہے تو خط پر ہم ایک نقطہ $ا_{-س}$ ایسا لیتے ہیں کہ $ا_{-س}\,ا = ا\,ا_س$ یعنے

$$\frac{ا\,ا_{-س}}{ا\,ا} = -\frac{ا\,ا_س}{ا\,ا} = -س$$

اس طرح ہم کو تمام منطق عددوں ر کے جواب میں ایک نقطہ $ا_ر$ ایسا مل جاتا ہے کہ

$$\frac{ا\,ا_ر}{ا\,ا} = ر \quad \ldots\ldots \quad (۴)$$

اب اگر ہم حصۂ ا ا کو طول کی اکائی مان لیں تو

$$ا\,ا_ر = ر \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۵)$$

یہ بآسانی دیکھا جا سکتا ہے کہ ہر غیر منطق عدد، دو منطق عددوں کے درمیان واقع ہوتا ہے۔ مثلاً $\sqrt{۲}$ جو غیر منطق ہے ۱،۴ اور ۱،۵ کے درمیان واقع ہے یا $\pi$ جو ایک ماورائی عدد ہے ۳،۱ اور ۳،۲ کے درمیان واقع ہے۔ اِس لیے ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ خطِ مستقیم پر اگر ا ا = ۱،۴ اور ا ب = ۱،۵ تو

ا اور ب کے درمیان ایک نقطہ ج ایسا موجود ہے کہ ا ج = $\sqrt{2}$
اس طرح اگر ا د = ۱ء۳ اور ا ی = ۲ء۳ تو نقاط د اور ی
کے درمیان ایک نقطہ ف ایسا ہے کہ ا ف = π ۔
غرض ہم یہ دیکھتے ہیں کہ ایک خطِ مستقیم پر کے نقطوں سے
تمام حقیقی اعداد کی جماعت کو اس طرح تعبیر کیا جا سکتا ہے کہ
ہر حقیقی عدد کے جواب میں چاہے وہ منطق ہو یا غیر منطق خطِ مستقیم پر
ایک اور صرف ایک نقطہ ملتا ہے اور اس کے برعکس خطِ مستقیم پر کا
ہر نقطہ ایک اور صرف ایک حقیقی عدد کے جواب میں ہے۔

## ۱۲- تفاعل-

**۱ء۲۱- مستقل اور متغیر مقداریں** - حقیقی اعداد
پر ہم دو طرح سے غور کر سکتے ہیں ایک تو یہ کہ ہم ان میں سے کسی ایک
خاص حقیقی عدد کو لیں مثلاً $\frac{1}{2}$ یا $-\frac{4}{3}$ یا $\sqrt{6}$ یا π - ان اعداد کی
قیمت کسی سوال میں اور بالعموم ہمیشہ وہی ایک رہتی ہے اور ان
میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی۔ بعض وقت ایسا ہوتا ہے کہ کسی مقدار
کی ٹھیک قیمت ہمارے لیے غیر اہم ہے۔ ہم اس قیمت کو جو چاہیں
فرض کر سکتے ہیں لیکن ایک مرتبہ کوئی قیمت فرض کر لینے کے بعد
بحث کے ختم ہونے تک ہم اس قیمت کو نہیں بدل سکتے۔ ایسی
مقداروں کو ہم حروفِ تہجی کے پہلے چند حروف ا، ب، ج وغیرہ سے
تعبیر کرتے ہیں۔ ان کی قیمت ایک مسئلہ یا ایک سوال کے دوران میں
نہیں بدلتی۔ ایسی مقدار کو ہم "مستقل" کہتے ہیں۔
لیکن علمِ ریاضی میں ہم کو اکثر ایسی مقداروں سے بھی سابقہ
پڑتا ہے جو ایک ہی مسئلہ کے دوران میں چند یا بہت سی قیمتوں
میں سے ہر ایک قیمت اختیار کر سکتی ہیں۔ ایسی مقداروں کو بالعموم
لا، ما، ی وغیرہ سے تعبیر کرتے ہیں۔ مثلاً، اگر ہم سال کا لاواں مہینہ

ہمیں تو اس میں لا کی قیمت ۱ سے ۱۲ تک کچھ بھی ہو سکتی ہے۔ اس طرح ہم ہفتہ کا لا واں دن، جماعت کا لا واں طالب علم، وغیرہ کہہ سکتے ہیں۔ ایسی مقادیر کو "متغیر مقادیر" کہتے ہیں۔ اگر ایک متغیر مقدار لا دو حقیقی عددوں مثلاً صفر اور ۱ کے درمیان کی ہر حقیقی قیمت کو اختیار کر سکے تو لا کو "مسلسل متغیر" کہتے ہیں۔ مسلسل متغیروں کے علاوہ علم احصاء میں ہم کو ایسے متغیروں سے بھی سابقہ پڑتا ہے جو صرف ثبت صحیح عددی قیمتیں ۱، ۲، ۳ ... ، ۱۰۰ .. اختیار کر سکتے ہیں۔ اس قسم کے متغیروں کو بالعموم ن سے تعبیر کرتے ہیں اور ان کو "غیر مسلسل متغیر" کہتے ہیں۔

۲۲، ۱۔ دو متغیروں لا اور ما پر غور کرو۔ فرض کرو کہ ان دونوں میں سے کسی ایک کو اگر ہم کوئی خاص قیمت دیں تو دوسرے متغیر کی اس کے جواب میں ایک معین قیمت حاصل ہوتی ہے۔ مثلاً فرض کرو کہ لا اور ما دو مسلسل متغیر ہیں جن کو ہم بالترتیب دو خطوط مستقیم پر فاصلوں ا ف = لا اور ب ق = ما سے تعبیر کرتے ہیں۔ اب اگر نقاط ف اور ق کے مقام بالکل ایک دوسرے سے آزاد نہ ہوں بلکہ ایک رشتے سے مربوط ہوں تو ہم سمجھ سکتے ہیں کہ یہ لا اور ما میں ایک رشتہ ہے۔ اس طرح اگر ہم کو نقطہ ف اور عدد لا معلوم ہوں تو اس رشتہ کی مدد سے نقطہ ق اور عدد ما معلوم ہو جاتے ہیں۔ مثلاً ہم فرض کر سکتے ہیں کہ ما = لا یا ما = ۲لا یا ما = $\frac{1}{2}$ لا یا ما = لا$^2$ + ۱۔ ان تمام مثالوں میں ما کی قیمت معین ہو جاتی ہے اگر لا کی قیمت معلوم ہو۔ لیکن یہ ضروری نہیں ہے کہ ما کی قیمت لا میں ایک جبری جملے کی شکل میں دی ہوئی ہو جیسا کہ اوپر کی مثالوں میں کیا گیا ہے بلکہ لا کی ہر قیمت کے جواب میں ما کی قیمت ایک جدول کی شکل میں دی جا سکتی ہے۔ مثلاً سنہ ۱۹۰۰ء سے اب تک کسی شہر کی آبادی ہر سال کے لیے ایک جدول کی شکل میں لکھی جائے یا کسی مقام پر بارہ پیما کی بلندی دیکھی جائے اور اس کو جدول میں مقام کے

بازو لکھ دیا جائے۔

اِن تمام حالتوں میں یعنے اس وقت جبکہ دو متغیروں لا اور ما میں سے ایک متغیر لا کی متعدد قیمتوں کے جواب میں دُوسرے متغیر ما کی متعدد قیمتیں حاصل ہوں تو ہم کہتے ہیں کہ ما ایک "تفاعل" ہے لا کا۔ اس میں لا کو "متغیر متبوع" اور ما کو "متغیّر تابع" کہتے ہیں۔

تفاعل کے مفہوم سے متعلق چند مثالیں طالب علم کو علم ہندسہ میں معلوم ہو چکی ہونگی۔ مثلاً اگر ہم ایک دائرہ کے محیط کے طول پر غور کریں تو معلوم ہوتا ہے کہ دائرہ کے نصف قطر کے بدلنے سے محیط کے طول میں بھی تبدیلی ہوتی ہے اور کسی نصف قطر لا کے جواب میں ہم کو محیط کا طول ما ذیل کے رشتہ سے حاصل ہوتا ہے:۔

$$ما = ۲ ۳ لا$$

اس صورت میں ہم دائرہ کے نصف قطر کو متغیر متبوع اور محیط کے طول کو متغیر تابع کہتے ہیں۔ اور اس رشتہ کو یوں بھی بیان کرتے ہیں کہ کسی دائرہ کے محیط کا طول اس کے نصف قطر کا ایک تفاعل ہے۔ بطور ایک دوسری مثال کے ہم دیکھتے ہیں کہ ایک مستقل قاعدے والے مثلث کا رقبہ ارتفاع کے ساتھ ساتھ بدلتا رہتا ہے۔ اس لیے اگر مثلث کے رقبہ کو ہم متغیر تابع ما سے اور ارتفاع کو متغیر متبوع لا سے تعبیر کریں تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ مثلث کا رقبہ ارتفاع کا ایک تفاعل ہے اور اس کو لکھتے ہیں:۔

$$ا = \frac{۱}{۲} ا لا$$

جہاں ا مستقل قاعدہ ہے۔

## ۱،۲۳۔ چند سادہ تفاعل اور اُن کی ترسیم

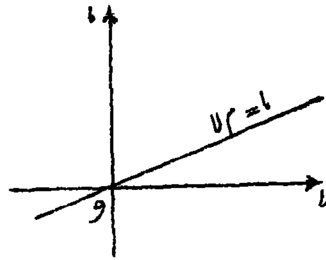
تفاعل کے مفہوم کو واضح کرنے کی خاطر ہم چند سادہ تفاعلوں پر غور کرینگے۔

سب سے پہلی مثال کے طور پر ہم تفاعل

$$ما = م لا$$

پر غور کرتے ہیں۔ علم ہندسۂ تحلیلی سے ہمیں معلوم ہے کہ یہ مساوات ایک خطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو مبداء میں سے گذرتا ہے اور جو محور لا کے ساتھ ایسا زاویہ طہ بناتا ہے کہ

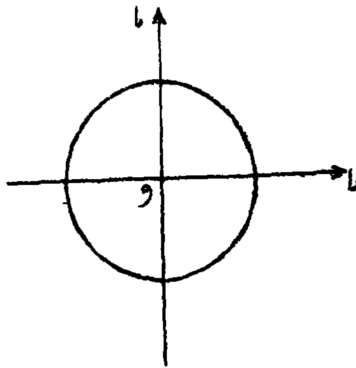
$$\text{مس طہ} = \text{م}$$




اس میں ہم دیکھتے ہیں کہ تفاعل م لا کی ترسیم ایک خطِ مستقیم ہے۔ اس کے علاوہ ہمیں یہ بھی معلوم ہوتا ہے کہ محور ما کے متوازی کوئی خط اس خط کو صرف ایک ہی نقطہ پر کاٹتا ہے۔ بالفاظِ دیگر لا کی ہر قیمت کے جواب میں ما کی صرف ایک ہی قیمت حاصل ہوتی ہے۔ ایسے تفاعلوں کو "یک قیمتی" کہتے ہیں۔

برخلاف اس کے اس تفاعل ما پر غور کرو جو ذیل کے جملے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = 1$$



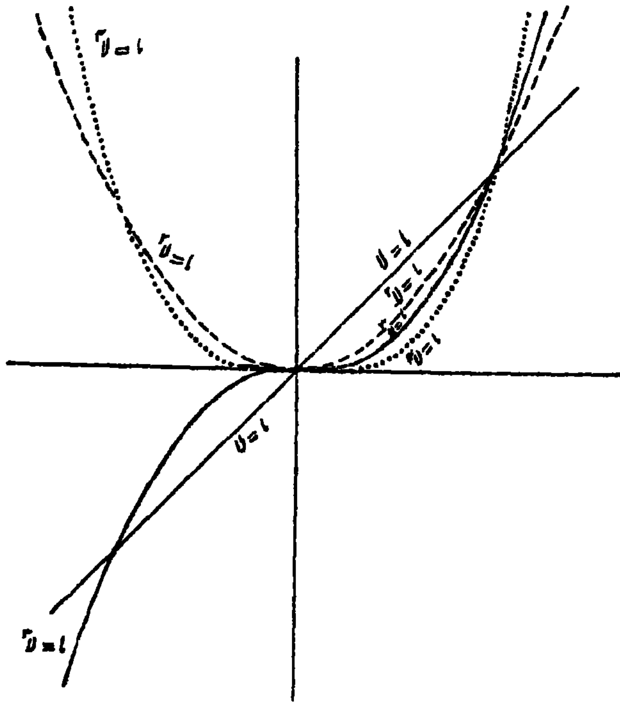

ہندسۂ تحلیلی سے ہم کو معلوم ہے کہ یہ مساوات ایک دائرہ کو تعبیر

کرتی ہے جس کا مرکز مبداء پر واقع ہے اور نصف قطر ۱ ہے ۔ اب یہ آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ لا کی کسی قیمت کے لیے اس دائرہ کی مساوات سے ما کی دو مساوی لیکن مختلف العلامت قیمتیں حاصل ہوتی ہیں :—

ما = ± √(۱ − لا$^{۲}$)

ایسے تفاعلوں کو جو متغیر متبوع کی ایک قیمت کے لیے ایک سے زیادہ مختلف قیمتیں اختیار کرتے ہیں "بسیار قیمتی" تفاعل کہتے ہیں ۔

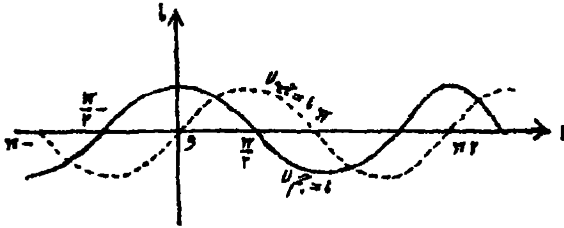
ذیل کی شکل میں ہم مقابلے کی خاطر ما = لا$^{ن}$ کی ترسیمیں دیتے ہیں جبکہ ن = ۱، ۲، ۳، ۴ ۔



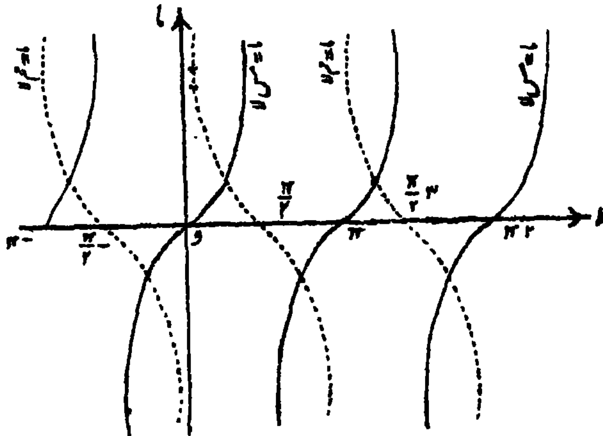

ہم دیکھتے ہیں کہ ما = لا اور ما = لا$^{۳}$ میں لا کی منفی قیمتوں کے

جواب میں ما کی منفی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔ لیکن ما = لا^۲ اور ما = لا^۴ میں لا کی منفی اور مثبت دونوں قیمتوں کے لیے ما کی مثبت قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔ اول الذکر تفاعلوں کو "طاق تفاعل" اور آخر الذکر کو "جفت تفاعل" کہتے ہیں۔ یہ تمام تفاعل جبری تفاعل ہیں۔

لیکن طالب علم کو ان کے علاوہ ایک دوسری قسم کے تفاعلوں سے بھی واقفیت ہے جن کو "مثلثی تفاعل یا مستدیر تفاعل" کہتے ہیں۔ ذیل کی شکلوں میں ہم جب لا، جم لا، مس لا اور ظم لا کی ترسیمیں دیتے ہیں۔




ما = جب لا اور ما = جم لا کی ترسیم۔




ما = مس لا اور ما = ظم لا کی ترسیم۔

عام سے عام صورت میں جبکہ تفاعل کے مفہوم کو ظاہر کرنا ہو یعنے یہ بتانا مقصود ہو کہ ایک متغیر ما دوسرے متغیر لا کا تفاعل ہے تو ہم ذیل کی ترقیم اختیار کرتے ہیں :-

ما = ف (لا) یا ما = فہ (لا) یا ما = فا (لا)، وغیرہ۔

مثلاً اگر ما = لا$^{۳}$ پر بحث کریں تو ف اس بات کو ظاہر کرتا ہے کہ متغیر تابع متغیر متبوع کے مکعب کے مساوی ہے۔ اور اگر ما = جم لا پر غور کریں تو ف اس بات کو بتلاتا ہے کہ متغیر تابع متغیر متبوع کے جیب التمام کے مساوی ہے۔

# مشقی سوالات ۱

(۱) اگر ف (لا) = ۲ لا$^{۳}$ - ۳ لا$^{۲}$ + ۵ لا + ۴ تو ف (۱)، ف (۲)، ف (۰)، ف (-۱) اور ف (-۵) کی قیمتیں دریافت کرو اور تفاعل کی ترسیم کرو۔

(۲) اگر ف (لا) = $\frac{(لا-۱)(لا-۵)}{(لا+۱)^{۲}}$ تو ف (۲)، ف (۱)، ف (۰)، ف ($\frac{۱}{۲}$)، ف (-۱)، ف (-۲) کی قیمتیں معلوم کرو اور تفاعل کی ترسیم کرو۔

(۳) اگر ف (لا) = (لا$^{۲}$-۱) (لا$^{۲}$-۴) تو ثابت کرو کہ ف (۱)، ف (-۱)، ف (۲)، ف (-۲) سب صفر ہیں۔ تفاعل کی ترسیم کے ذریعہ اس کی تصدیق کرو۔

(۴) اگر ف (لا) = و لا$^{۲}$ + ب لا + ج تو ف (لا+۱)، ف (لا-۱) اور ف (لا + ھ) - ف (لا) کی قیمتیں معلوم کرو۔

(۵) ما = $\frac{لا^{۲} (لا - ۴)}{لا + ۳}$ کی ترسیم کرو۔ نقطۂ لا = -۳ پر تفاعل کی کیا قیمت ہے۔

(۶) ما = $\frac{لا^{۲} - ۹}{لا - ۳}$ کی ترسیم کرو اور نقطہ لا = ۳ پر تفاعل کی قیمت معلوم کرو۔

(۷) ما = جب (لا − π/۲)، ما = ۲ جب$^{2}$ لا، ما = ۱ + جم ۲لا کی ترسیم کرو۔

(۸) ما = جب لا + جم لا اور ما = جب لا − جم لا کی ترسیم کرو۔

(۹) ما$^{2}$ = لا$^{2}$ (لا + ۳)/(لا − ۳) اور ما$^{2}$ = لا$^{2}$ (لا + ۳)/(۳ − لا) کی ترسیم کرو۔

(۱۰) ما = ۱/۳ لا − ۲/لا + ۱ کی ترسیم کرو۔

(۱۱) اگر ف (لا) = لا$^{2}$ − ۳لا + ۲ تو ف (۲)، ف (۱/۲) اور ف (√۲) معلوم کرو۔

(۱۲) اگر ف (لا) = لا + √(۱ − لا$^{2}$) تو ف (۱) اور ف (۰) معلوم کرو۔

(۱۳) اگر ف (لا) = (جب لا − جم لا)/(جب لا + جم لا) تو ف (π/۴) معلوم کرو۔

(۱۴) اگر ف (لا) = (جب لا + مس لا)/(جم لا + مم لا) تو ف (π/۶) معلوم کرو۔

(۱۵) اگر ف (لا) = لا$^{2}$ − ۲ + ۱/لا تو ف (۲لا) اور ف (۱/لا) معلوم کرو۔

(۱۶) اگر ف (لا) = ۲لا$^{2}$ − ۳لا + ۱/لا تو ف (۶) اور ف (ما + ۱) معلوم کرو۔

(۱۷) اگر ف (لا) = لا$^{2}$ + لا + ۱ تو ف (لا + ھ) − ف (لا) معلوم کرو۔

(۱۸) اگر ف (لا) = ۱/لا تو [ف (۱ + ھ) − ف (۱)]/ھ معلوم کرو۔

(۱۹) اگر ف (لا) = (لا + ۳) (۳ − لا) تو ثابت کرو کہ ف (−لا) = ف (لا)

(۲۰) اگر ف (لا) = (۱ + لا$^{2}$)/لا تو ثابت کرو کہ ف (۱/لا) = ف (لا)

(۲۱) اگر ف (لا) = ا لا$^{6}$ + ب لا$^{4}$ + ج لا$^{2}$ + د تو ثابت کرو کہ ف (لا) = ف (−لا)
اور اگر ف (لا) = ا لا$^{7}$ + ب لا$^{5}$ + ج لا$^{3}$ + د لا تو ثابت کرو کہ ف (−لا) = −ف (لا)

(۲۲) اگر ف (لا) = لا$^{2}$ + ۱ تو [ف (لا + ۱) + ف (لا − ۱) − ۲ف (لا)]/[ف (لا + ۱) − ف (لا − ۱)] معلوم کرو۔

(۲۳) اگر ما = ف (لا) = (لا + ۱)/(۲لا + ۳) تو ثابت کرو کہ ف (ما) = (۳لا + ۴)/(۸لا + ۱۱)

(۲۴) اگر $\text{ف}(\text{لا}) = \text{ب}\,\dfrac{\text{لا}-\text{ا}}{\text{ب}-\text{ا}} + \text{ا}\,\dfrac{\text{لا}-\text{ب}}{\text{ا}-\text{ب}}$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{ف}(\text{ا}) + \text{ف}(\text{ب}) = \text{ف}(\text{ا}+\text{ب})$$

(۲۵) اگر $\text{ف}(\text{لا}) = \dfrac{(\text{لا}-\text{ا})(\text{لا}-\text{ب})}{(\text{ج}-\text{ا})(\text{ج}-\text{ب})} + \dfrac{(\text{لا}-\text{ب})(\text{لا}-\text{ج})}{(\text{ا}-\text{ب})(\text{ا}-\text{ج})} + \dfrac{(\text{لا}-\text{ج})(\text{لا}-\text{ا})}{(\text{ب}-\text{ج})(\text{ب}-\text{ا})}$

تو ثابت کرو کہ $\text{ف}(\text{ا}) = \text{ف}(\text{ب}) = \text{ف}(\text{ج}) = \text{ف}(۰)$

(۲۶) اگر $\text{ف}(\text{لا}) = \dfrac{\text{ب ج}(\text{لا}-\text{ا})^2}{(\text{ا}-\text{ب})(\text{ا}-\text{ج})} + \dfrac{\text{ج ا}(\text{لا}-\text{ب})^2}{(\text{ب}-\text{ج})(\text{ب}-\text{ا})} + \dfrac{\text{ا ب}(\text{لا}-\text{ج})^2}{(\text{ج}-\text{ا})(\text{ج}-\text{ب})}$

تو ثابت کرو کہ $\text{ف}(\text{ا}) + \text{ف}(\text{ب}) + \text{ف}(\text{ج}) = \text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{ج}^2$

(۲۷) اگر $\text{ا} = \text{ف}(\text{لا}) = \dfrac{\text{ا لا} + \text{ب}}{\text{ج لا} - \text{ا}}$ تو ثابت کرو کہ $\text{لا} = \text{ف}(\text{ا})$



## ۲۴ر۱ - ایک ثبت صحیح متغیر کے تفاعل (تواتر)

گذشتہ دفعہ میں ہم نے ایک مسلسل متغیر لا کے تفاعلوں کی بہت سی مثالیں پیش کی ہیں - طالب علم کو یاد ہوگا کہ ہم نے مسلسل متغیر کی تعریف میں یہ شرط لگائی تھی کہ لا کسی دو حقیقی عددوں کے درمیان کی ہر حقیقی قیمت کو اختیار کرے - اب ہم ایسے تفاعلوں پر غور کرتے ہیں جن کے متغیر تبوع صرف ثبت صحیح عددی قیمتوں کو اختیار کرتے ہیں - پس تبوع متغیر ایک غیر مسلسل متغیر ہے اور اس کو ہم بالعموم ن سے تعبیر کرتے ہیں - اس کے تفاعلوں کو ہم ف (ن) سے تعبیر کرینگے - تبوع متغیر ن کی قیمتیں صرف ۱، ۲، ۳، ...، ۱۰۰، ... یعنی صرف مثبت صحیح عدد ہو سکتی ہیں - ن کبھی منفی قیمت یا کسری یا غیر منطق قیمت نہیں اختیار کرتا - اس قسم کے تفاعلوں کی چند مثالیں حسب ذیل ہیں :-

(۱) پہلے ن طبعی اعداد کا مجموعہ :

$$\text{س}_{۱}(\text{ن}) = ۱ + ۲ + ۳ + \cdots + \text{ن} = \frac{\text{ن}(\text{ن}+۱)}{۲}$$

(۲) پہلے ن طبعی اعداد کے مربعوں کا مجموعہ :

$$\text{س}_{۲}(\text{ن}) = ۱^{۲} + ۲^{۲} + ۳^{۲} + \cdots + \text{ن}^{۲} = \frac{\text{ن}(\text{ن}+۱)(۲\text{ن}+۱)}{۶}$$

(۳) پہلے ن طبعی اعداد کا حاصل ضرب

$$\lfloor\text{ن} = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \cdots \times \text{ن}$$

(۴) ن اشیا میں سے ک اشیاء کے اجتماعوں کی تعداد (ک مستقل ہے)

$${}_{\text{ن}}\text{ح}_{\text{ک}} = \binom{\text{ن}}{\text{ک}} = \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)\cdots(\text{ن}-\text{ک}+۱)}{\lfloor\text{ک}} = \frac{\lfloor\text{ن}}{\lfloor\text{ک}\,\lfloor\text{ن}-\text{ک}}$$

**تواتر** — اگر ہمیں یکے بعد دیگرے بے شمار اعداد

$$\text{ا}_{۱}،\ \text{ا}_{۲}،\ \ldots،\ \text{ا}_{\text{ن}}،\ \ldots\ldots \qquad (۱)$$

اس طرح دیے ہوئے ہوں کہ

(۱) ان میں کا سب سے پہلا عدد $ل_{۱}$ معلوم ہو اور

(۲) ہر ن ویں عدد $ل_{ن}$ کے بعد ایک (ن + ۱) واں عدد $ل_{ن+۱}$ معلوم کر سکیں تو عددوں کی ترتیب (۱) کو ہم "تواتر" کہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ تواتر (۱) در اصل ایک مثبت صحیح متغیر ن کا تفاعل ہے۔ تواتر کا یہ مفہوم چند سادہ مثالوں کے ذریعہ بخوبی ذہن نشین ہو جائیگا۔

مثال ۱۔ $ل_{ن} = \frac{۱}{ن}$

اس تواتر کا پہلا عدد $\frac{۱}{۱}$ یعنے ایک ہے اور جو کوئی دوسرا عدد چاہیں آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے

$$۱، \frac{۱}{۲}، \frac{۱}{۳}، \frac{۱}{۴}، \ldots، \frac{۱}{۱۰۰}، \ldots، \frac{۱}{۹۹۹}، \ldots$$

مثال ۲۔ $ل_{۲م} = \frac{۱}{م}$، $ل_{۲م-۱} = \frac{۱}{۲م}$

اس تواتر کا پہلا عدد $\frac{۱}{۲}$ ہے، ہر جفت عدد ایک کسر ہے جس کا شمار کنندہ ۱ اور نسب نما اس جفت عدد کے نصف کے مساوی ہے۔ ہر طاق عدد ایک کسر ہے جس کا شمار کنندہ ۱ اور نسب نما اس کے بعد والے جفت صحیح عدد کے مساوی ہے۔ یعنے تواتر حسب ذیل ہے:-

$$\frac{۱}{۲}، ۱، \frac{۱}{۴}، \frac{۱}{۲}، \frac{۱}{۶}، \frac{۱}{۳}، \frac{۱}{۸}، \frac{۱}{۴}، \ldots\ldots$$

مثال ۳۔ $ل_{ن} = \frac{ن}{ن+۱}$

اس تواتر کا پہلا عدد $\frac{۱}{۱+۱}$ یعنے $\frac{۱}{۲}$ ہے اور تواتر حسب ذیل ہے:-

$$\frac{۱}{۲}، \frac{۲}{۳}، \frac{۳}{۴}، \ldots، \frac{۹}{۱۰}، \ldots، \frac{۱۵}{۱۶}، \ldots، \frac{۱۰۸}{۱۰۹}، \ldots$$

پہلی مثال یعنے تواتر $\frac{۱}{ن}$ میں ہم دیکھتے ہیں کہ اس تواتر کا ہر عدد یعنے $\frac{۱}{ن+۱}$ اپنے پہلے عدد یعنے $\frac{۱}{ن}$ سے کم ہے کیونکہ ہمیں معلوم ہے کہ ایک کسر کی قیمت کم ہو جاتی ہے اگر اس کا نسب نما بڑا ہو جائے۔ اسی طرح گویا

تواتر کے عدد قیمت میں اُترتے جاتے ہیں اور اس لیے ایسے تواتر کو **نزولی تواتر** کہتے ہیں ۔

اس کے برخلاف تیسری مثال یعنے تواتر $\frac{ن}{ن+۱}$ میں یہ آسانی سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ ہر عدد اپنے پہلے کے عدد سے بڑا ہے کیونکہ

$$(ن+۱)^۲ > ن^۲ + ۲ن$$
$$> ن\,(ن+۲)$$

$$\text{یعنے}\quad \frac{ن+۱}{ن+۲} > \frac{ن}{ن+۱}$$

غرض اس تواتر کے اعداد بتدریج بڑھتے جاتے ہیں ۔ ایسے تواتر کو **صعودی تواتر** کہتے ہیں۔

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ دوسری مثال میں دیا ہوا تواتر نہ تو نزولی ہے اور نہ صعودی ۔

## ۱٫۳ ۔ تواتر کی انتہا ۔

**۱٫۳۱ ۔ ن ← ∞ کے معنے :** ۔ فرض کرو کہ ن یکے بعد دیگرے قیمتیں ۱، ۲، ۳ ... اختیار کرتا ہے ۔ خود یکے بعد دیگرے کے مفہوم سے ظاہر ہے کہ ن یہ قیمتیں مثلاً ہر ثانیہ کے ابتدا میں اختیار کرتا ہے ۔ تب جوں جوں ثانیے گذرتے جاتے ہیں ن بڑا ہوتا جاتا ہے اور چونکہ وقت کی کوئی حد نہیں ہے اس لیے ن کے بڑھنے کی بھی کوئی حد نہیں ۔ ہم چاہے کتنے ہی بڑے عدد مثلاً (۹۷۱۳۴۸۶۲۷) کا تصور کریں ایک وقت ضرور ایسا آئیگا کہ ن اس عدد سے بھی بڑا ہو جائیگا۔

ن میں اضافہ کے اس ختم نہ ہونے والے عمل کو تعبیر کرنے کے لیے ہم آسانی کی خاطر ایک مختصر جملہ "ن مائل بہ لاتناہی" یا علامتوں میں "ن ← ∞" استعمال کرتے ہیں اور علامت ∞ سے بالعموم لاتناہی کو تعبیر کیا جاتا ہے ۔ ن کے لاتناہی کی طرف مائل ہونے میں بھی وقت کا تصور پایا جاتا ہے لیکن یہ تصور ہم نے محض اپنی

آسانی کی خاطر اختیار کیا ہے۔ خود متغیر ن کی ذات میں وقت کا کوئی مفہوم نہیں پایا جاتا۔ طالب علم کو یہ بات اچھی طرح ذہن نشین کر لینی چاہیے کہ جملہ "ن مائل بہ لاتناہی" کو جب ہم استعمال کرتے ہیں تو اس سے ہماری مراد محض یہ ہوتی ہے کہ ن بتدریج ایسی قیمتیں اختیار کر رہا ہے جو بغیر ختم ہونے کے بڑھتی چلی جا رہی ہیں۔ لاتناہی بذاتِ خود کوئی عدد نہیں ہے اور مساوات $ن = \infty$ کے کوئی معنی نہیں کیونکہ "مساوی بہ لاتناہی" ایک بے معنی جملہ ہے۔ علامت $\infty$ فی نفسہٖ ایک بے معنی علامت ہے اور صرف "ن مائل بہ $\infty$" میں یہ معنی دار ہے اور اس کے وہی معنی ہیں جو ہم نے اوپر بطور تعریف کے مقرر کیے ہیں۔

## ۱،۳۲۔ انتہا کے مفہوم کی توضیح مثالوں کے ذریعہ۔

### مثال ۱۔ $ل = \frac{1}{ن}$

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots\ldots$$

اس تواتر کا ہر عدد اپنے پہلے عدد سے کم ہے اس لیے یہ ایک نزولی تواتر ہے۔

$\frac{1}{ن} <$ ۰۱، ن کی ان تمام قیمتوں کے لیے جو ۱۰۰ سے بڑی ہوں یعنے ۱۰۱ اور بعد کے تمام عددوں کے لیے۔

$\frac{1}{ن} <$ ۰۰۱، ″ ″ جو ۱۰۰۰ ″ ″ یعنے ۱۰۰۱ ″ ″

$\frac{1}{ن} <$ ۰۰۰۰۱، ″ ″ جو ۱۰۰۰۰۰ یعنے ۱۰۰۰۰۱ ″

$\frac{1}{ن} < \frac{1}{10^{15}}$ ن کی ان قیمتوں کے لیے جو $10^{15}$ سے بڑی ہوں یعنے $10^{15}+1$ اور بعد کے تمام عددوں کے لیے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ ہم کوئی مثبت عدد صہ انتخاب کریں چاہے وہ کتنا ہی چھوٹا ہو ایک صحیح عدد ن ایسا معلوم ہو سکتا ہے کہ اس کے لیے اور اس کے بعد کے تمام اعداد صحیح کے لیے $\frac{1}{ن} <$ صہ۔ اس کو دوسرے الفاظ میں ہم یوں بھی بیان کر سکتے ہیں کہ $\frac{1}{ن}$ اور صفر کا

فرق جتنا ہم چاہیں چھوٹا بنا سکتے ہیں اگرچہ $\frac{۱}{ن}$ خود کبھی صفر نہیں ہوتا۔ فرق مخالف ہم کو چاہے کتنا ہی چھوٹا عدد کیوں نہ بیان کرے ہم ایک صحیح عدد ن ایسا معلوم کر سکتے ہیں کہ تواتر کا ن واں عدد اور اس کے بعد کے تمام اعداد صہ سے چھوٹے ہوں۔ اس بات کو ہم مختصر طور پر یوں ظاہر کرتے ہیں کہ تواتر "$\frac{۱}{ن}$ کی انتہا صفر ہے" جبکہ ن ← ∞ ہو۔

مثال ۲ - $لن = ۱ - \frac{۱}{ن}$

تواتر حسب ذیل ہے :-

$\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۲}{۳}$ ، $\frac{۳}{۴}$ ، $\frac{۴}{۵}$ ، $\frac{۵}{۶}$ ، . . . . .

اس تواتر کا ہر عدد اپنے پہلے عدد سے بڑا ہے اور اس لیے یہ ایک صعودی تواتر ہے۔ اب اس میں ہم ن کو چاہے کتنا ہی بڑا لیں لن ہمیشہ ۱ سے کم رہتا ہے۔ لیکن ہم اوپر کی مثال میں دیکھ چکے ہیں کہ $\frac{۱}{ن}$ کو جتنا چاہیں چھوٹا بنایا جا سکتا ہے اس لیے معلوم ہوتا ہے کہ $(۱ - \frac{۱}{ن})$ کو ۱ کے جتنا قریب چاہیں لا سکتے ہیں یعنے $۱ - \frac{۱}{ن}$ اور ۱ کا فرق جتنا چاہیں چھوٹا بنا سکتے ہیں۔

مثلاً $\{۱ - (۱ - \frac{۱}{ن})\}$ چھوٹا ہوگا ۰۰۰۱ء سے اگر $\frac{۱}{ن} <$ ۰۰۰۱ء

یعنے اگر ن > ۱۰۰۰۰ یعنے ن ۱۰۰۰۱ یا اس سے بڑا صحیح عدد لیا جائے۔

اس طرح $\{۱ - (۱ - \frac{۱}{ن})\} < \frac{۱}{۱۰^{۲۴}}$ اگر ن > $۱۰^{۲۴}$

تواتر $لن = ۱ - \frac{۱}{ن}$ کی اس خاصیت کو کہ اس کی عام رقم $۱ - \frac{۱}{ن}$ کا فرق ۱ سے جس قدر چاہیں چھوٹا بنایا جا سکتا ہے۔ ریاضی کی زبان میں ہم یوں بیان کرتے ہیں کہ " تواتر $۱ - \frac{۱}{ن}$ کی انتہا ۱ ہے" جبکہ ن ← ∞ ہو۔

اوپر کی دونوں مثالوں کے نتائج کو ہم علامتوں میں اس طرح ظاہر کرتے ہیں۔

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

مثال ۳۔ $l_n = n^2$ یہ تواتر حسب ذیل ہے:۔

۱، ۴، ۹، ۱۶، ۲۵، . . . .

اس تواتر میں ہم دیکھتے ہیں کہ ہر عدد اپنے پیشرو سے بڑا ہے یعنے یہ ایک صعودی تواتر ہے، اب ہم چاہیں کتنا ہی بڑا مثبت عدد (گ) لیں ایک صحیح عدد ن ایسا معلوم ہو سکتا ہے کہ ن کی اس قیمت کے لیے اور اس کے بعد کی تمام صحیح قیمتوں کے لیے $n^2 >$ گ۔ مثلاً

$n^2 > 1000000$ اگر ن ۱۰۰۱ یا اس سے بڑا عدد ہو۔

$n^2 > 10000000000$ اگر ن ۱۰۰۰۰۱ یا اس سے بڑا عدد ہو۔

$n^2 > 10^{82}$ اگر ن $10^{41} + 1$ یا اس سے بڑا عدد ہو۔

غرض کہ ہم چاہے کتنے ہی بڑے عدد کا تصور کریں ایک وقت ایسا آئیگا کہ تواتر $l_n = n^2$ بالآخر اس عدد سے بھی بڑا ہو جائیگا۔ یعنی تواتر $n^2$ کی کوئی محدود انتہا نہیں ہے۔ اس کو یوں بھی بیان کرتے ہیں کہ تواتر $n^2$ کی انتہا $+\infty$ ہے اور اس طرح لکھتے ہیں

$$\lim_{n \to \infty} n^2 = \infty$$

اس طرح اگر تواتر $l_n = -n^2$ یعنے تواتر

۔۱، ۔۴، ۔۹، ۔۱۶، ۔۲۵، . . . .

پر غور کریں تو ہم دیکھتے ہیں کہ اس تواتر کی رقمیں جبریہ طور پر کم ہوتی جارہی ہیں اور ہم چاہے کتنا ہی چھوٹا منفی عدد (۔گ) لیں ن کو اس طرح انتخاب کیا جا سکتا ہے کہ

$-n^2 <$ ۔گ ہے مثلاً

$-ن^{۲} < -۱۰۰۰۰۰۰$ اگر ن ۱۰۰۱ یا اس سے بڑا صحیح عدد ہو۔

$-ن^{۲} < -۱۰۰۰۰۰۰۰۰$ اگر ن ۱۰۰۰۱ یا اس سے بڑا صحیح عدد ہو۔

تواتر $-ن^{۲}$ کی بھی کوئی محدود انتہا نہیں ہے یا اگر ہم چاہیں تو یوں کہہ سکتے ہیں کہ تواتر "$-ن^{۲}$ کی انتہا $-\infty$" ہے اور اس طرح لکھتے ہیں

$$\underset{ن \to \infty}{نہا} \left(-ن^{۲}\right) = -\infty$$

یہ محض تعریف ہے جو اختصار کی خاطر اختیار کی گئی ہے ورنہ حقیقت میں ایسی مساواتوں کے کوئی معنی نہیں۔

مثال ۴۔ انتہا کے مفہوم کو واضح کرنے کے لیے ایک اچھی مثال کسی لاتناہی سلسلہ کا حاصل جمع ہے۔ محدود سلسلوں مثلاً حسابی ہندسی یا موسیقی سلسلوں سے طالب علم کو پہلے سے ہی واقفیت ہے۔

مثلاً ذیل کا سلسلہ

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۱۶} + \cdots + \frac{۱}{۲^{ن}} \qquad (۱)$$

ایک محدود ہندسی سلسلہ ہے جس کا مشترک جزو ضربی $ر = \frac{۱}{۲}$ ہے۔ اگر ہم اس ن رقموں والے سلسلہ کے حاصل جمع کو $ل_{ن}$ سے تعبیر کریں تو ہمکو معلوم ہے کہ

$$ل_{ن} = \frac{\frac{۱}{۲}\left(۱ - \frac{۱}{۲^{ن}}\right)}{۱ - \frac{۱}{۲}} = ۱ - \frac{۱}{۲^{ن}} \qquad (۲)$$

سلسلہ (۱) کو اگر ہم ن رقموں پر ختم ہوتا ہوا نہ فرض کریں بلکہ مان لیں کہ یہ سلسلہ اس قاعدہ سے ہمیشہ آگے بڑھتا ہے اور اس کی بے شمار رقمیں ہیں:

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۱۶} + \cdots + \frac{۱}{۲^{ن}} + \frac{۱}{۲^{ن+۱}} + \cdots \qquad (۳)$$

تو اس لاتناہی سلسلہ (۳) کی مدد سے ہم کو ایک لاتناہی تواتر ملتا ہے

جو حسبِ ذیل ہے :۔

$ل_{۱}$ = پہلی رقم $= \frac{۱}{۲}$

$ل_{۲}$ = پہلی دو رقموں کا مجموعہ $= \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴}$

$ل_{۳}$ = پہلی تین رقموں کا مجموعہ $= \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} = \frac{۷}{۸}$

. . . . . . . . . . . . .

$ل_{ن}$ = پہلی ن رقموں کا مجموعہ $= \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \cdots + \frac{۱}{۲^{ن}} = ۱ - \frac{۱}{۲^{ن}} = \frac{۲^{ن} - ۱}{۲^{ن}}$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

یعنے تواتر حسبِ ذیل ہے :۔

$$\frac{۱}{۲}،\ \frac{۳}{۴}،\ \frac{۷}{۸}،\ \frac{۱۵}{۱۶}،\ \frac{۳۱}{۳۲}، \ldots\ \frac{۲^{ن}-۱}{۲^{ن}}، \ldots \qquad (۴)$$

ہم دیکھتے ہیں یہ ایک صعودی تواتر ہے جس کی ہر رقم ۱ سے کم ہے لیکن یہ تواتر بتدریج ۱ کے قریب آرہا ہے گو کبھی اس کا کوئی عدد ۱ کے بالکل مساوی نہیں ہو جاتا۔ لیکن ہم ایک صحیح عدد ن ایسا معلوم کر سکتے ہیں کہ تواتر (۴) میں کے عدد $ل_{ن}$ کا فرق ۱ سے یعنے $۱ - ل_{ن}$ جس قدر چاہیں چھوٹا ہو جائے۔ بالفاظِ دیگر سلسلہ (۳) کی ن رقموں کا مجموعہ ۱ کے جتنا چاہیں قریب ہو جائے۔

مثلاً فرض کرو کہ ہم معلوم کرنا چاہتے ہیں کہ سلسلہ (۳) کی کتنی رقمیں لی جائیں کہ مجموعہ ۱ سے بقدر $\frac{۱}{۱۰^{۱۰۰۰}}$ (یعنے $۱۰^{-۱۰۰۰}$) کے کم ہو۔

اب چونکہ $ل_{ن} = ۱ - \frac{۱}{۲^{ن}}$

$\therefore\ ۱ - ل_{ن} = ۱ - (۱ - \frac{۱}{۲^{ن}}) = \frac{۱}{۲^{ن}}$

$\therefore\ \frac{۱}{۲^{ن}} \leq \frac{۱}{۱۰^{۱۰۰۰}}$

$\therefore\ ۲^{ن} \geq ۱۰^{۱۰۰۰}$ یعنے ن $لوک_{۱۰}\, ۲ \geq ۱۰۰۰$ یعنے ن $\geq \frac{۱۰۰۰}{لوک_{۱۰}\, ۲}$

لوکارتمی جدولوں سے ہم بآسانی معلوم کرسکتے ہیں کہ اگر ن = ۳۳۲۲ تو $۲^{ن} > ۱۰^{۱۰۰۰}$ یعنے $\frac{۱}{۲^{ن}} < \frac{۱}{۱۰^{۱۰۰۰}}$ جس سے معلوم ہوا کہ اگر سلسلۂ (۳) کی ۳۳۲۲ رقمیں لی جائیں تو سلسلہ کا مجموعہ ۱ سے مقدار $\frac{۱}{۱۰^{۱۰۰۰}}$ سے بھی چھوٹا ہوگا۔ اس طرح ہم سلسلہ کی اور زیادہ رقمیں لے کر سلسلہ کو ۱ کے اور زیادہ قریب لا سکتے ہیں۔ اس بناء پر ہم کہتے ہیں کہ تواتر (۴) یعنے $ل_{ن} = ۱ - \frac{۱}{۲^{ن}}$ کی انتہا ۱ ہے یعنے لاتناہی سلسلۂ (۳) کا مجموعہ ۱ ہے۔

سلسلۂ (۳) اور اس کے مجموعہ کی ہم ہندسی تعبیر کر سکتے ہیں۔

ا ——— $ج_۱$ ——— $ج_۲$ — $ج_۳$ $ج_۴$ $ج_۵$ ب

فرض کرو کہ اب ایک خطِ مستقیم کا طول ۱ ہے۔ اب کی تنصیف نقطہ $ج_۱$ پر کرو۔ $ج_۱$ب کی تنصیف نقطہ $ج_۲$ پر، $ج_۲$ب کی تنصیف نقطہ $ج_۳$ پر اور $ج_۳$ب کی $ج_۴$ پر، اسی طرح متواتر تنصیف کرتے چلے جاؤ تو

$$ا ج_۱ = \frac{۱}{۲}،\ ج_۱ ج_۲ = \frac{۱}{۴}،\ ج_۲ ج_۳ = \frac{۱}{۸}،\ ج_۳ ج_۴ = \frac{۱}{۱۶}،\ ج_۴ ج_۵ = \frac{۱}{۳۲}،$$ وغیرہ

اور سلسلۂ (۳) کی حسب ذیل تعبیر ہو جاتی ہے:

$$ا ج_۱ + ج_۱ ج_۲ + ج_۲ ج_۳ + ج_۳ ج_۴ + \cdots + ج_{ن-۱} ج_{ن} + \cdots \quad (۵)$$

اور تواتر (۴) میں

$$ل_{ن} = ا ج_{ن} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۶)$$

اب ظاہر ہے کہ جس قدر زیادہ تنصیف کرتے چلے جائیں نقطہ $ج_{ن}$ نقطہ ب کے اسی قدر زیادہ قریب آتا چلا جائیگا اور ہم عمل تنصیف کو اتنے مرتبہ دُہرا سکتے ہیں کہ $ج_{ن}$ب کا طول جتنا چاہیں چھوٹا ہو جائے یعنے $اج_{ن}$ کا طول اب کے

طول کے جس قدر چاہیں قریب آجائے پس

نہا ۲ ج = اب = ا ۔

## ۱،۳۱ - انتہا کی باضابطہ تعریف

—— مذکورۂ بالا مثالوں کے ذریعہ انتہا کے مفہوم کی توضیح کرنے کے بعد اب ہم انتہا کی باضابطہ تعریف کرینگے۔

**تعریف ا** —— تواتر لن کی انتہا جبکہ ن مائل بہ لاتناہی ہو ل اُس وقت ہوگی جبکہ اگر کوئی اختیاری چھوٹا ثبت عدد صہ دیا ہوا ہو تو ہم ایک ایسا مثبت صحیح عدد نَ معلوم کر سکیں کہ تواتر کے رکن لن سے شروع کرکے اور بعد کے تمام رکنوں کے لیے لن اور ل کا فرق صہ سے چھوٹا ہو۔ اس صورت میں تواتر لن کو "مستدق" کہتے ہیں۔

لن اور ل کے مطلق فرق کو | لن - ل | سے تعبیر کرتے ہیں۔

انتہا کی اس تعریف میں دو نکتے بہت اہم ہیں اور طالب علم کو ان پر بخوبی غور کرنا چاہیئے۔ اول تو یہ کہ صہ جو چھوٹا مثبت عدد دیا ہوا ہے وہ اختیاری چھوٹا ہے یعنے سوائے بالکل صفر کے ہم صہ کو جتنا چھوٹا چاہیں لے سکتے ہیں۔ صہ کی مختلف قیمتیں لینے سے نَ کی بالعموم مختلف قیمتیں حاصل ہوتی ہیں اور ہر صہ کے لیے اوپر کی تعریف میں دی ہوئی خاصیت پائی جانی چاہیے۔ اگر صہ کی بعض قیمتوں کے لیے یہ خاصیت پائی جائے اور بعض قیمتوں کے لیے یہ خاصیت نہ پائی جائے تو لن کی انتہا ل نہیں ہوگی۔ دوسرے یہ کہ اگر لن سے شروع کرنے کے بعد تواتر کا صرف ایک رکن بھی ایسا پایا جائے کہ اس کا اور ل کا فرق صہ سے چھوٹا نہیں ہے تو انتہا ل نہیں ہوگی۔ نَ ایسا معلوم کرنا چاہیے کہ لن کے بعد کے **تمام** ارکان کے لیے لن اور ل کا فرق صہ سے چھوٹا ہو۔ لفظ تمام پر ہم نے اسی لیے زور دیا ہے۔

اِس سے ظاہر ہے کہ اگر ہم کسی تواتر لن میں ن کی چند محدود قیمتوں کے لیے

$ل_ن$ کی قیمت بدل دیں تو اس سے تواتر کی انتہا پر کوئی اثر نہیں پڑتا۔ مثلاً ہم کو معلوم ہے کہ تواتر $ل_ن = \frac{۱}{ن}$ کی انتہا صفر ہے۔ اب فرض کرو کہ ہم ایک نیا تواتر اس طرح حاصل کرتے ہیں:

$$ل_ن = ۱۰۰ \quad \text{جبکہ} \quad ن = ۱۰، ۱۰^{۲}، ۱۰^{۳}، \ldots\ldots، ۱۰^{۱۰۰}$$

$$ل_ن = \frac{۱}{ن}، \quad \text{ن کی باقی تمام قیمتوں کے لیے۔}$$

اس تواتر کی انتہا بھی صفر ہے۔

لیکن اگر ایک تواتر کے لامتناہی ارکان کی قیمت بدل دی جائے تو انتہا کا وہی باقی رہنا ضروری نہیں ہے۔ مثلاً اگر ایک تواتر $ل_ن$ ایسا لیا جائے کہ

$$ل_ن = ۱ \quad \text{جبکہ ن طاق ہو،}$$

$$ل_ن = \frac{۱}{ن} \quad \text{جبکہ ن جفت ہو،}$$

تو اس تواتر کی انتہا نہ تو صفر ہے نہ ۱۔

اس کے علاوہ یہ بھی ضروری نہیں ہے کہ تواتر کی انتہا تواتر کے کسی رکن کی اصلی قیمت کے مساوی ہو۔ گذشتہ دفعہ میں ہم نے جتنی مثالیں دی ہیں اُن میں طالب علم نے دیکھا ہوگا کہ تواتر کے کسی رکن کی قیمت انتہا کے مساوی نہیں ہے۔ مثلاً تواتر $\frac{۱}{ج}$ کی انتہا صفر ہے۔ لیکن تواتر کا کوئی رکن صفر کے مساوی نہیں ہے۔

البتہ بعض خاص تواتروں کے لیے یہ ممکن ہے کہ تواتر کی انتہا کسی ایک رکن کی قیمت کے مساوی ہو۔ مثلاً فرض کرو کہ ہم ایک تواتر $ل_ن$ اس طرح لیتے ہیں کہ

$$ل_ن = ۰ \quad \text{جبکہ} \quad ن = ۱۰، ۱۰^{۲}، ۱۰^{۳}، \ldots، ۱۰^{۱۰۰}$$

$$ل_ن = \frac{۱}{ن} \quad \text{ن کی باقی تمام قیمتوں کے لیے۔}$$

ہم کو معلوم ہے کہ چونکہ اس تواتر کے صرف محدود تعداد ارکان کی قیمت بدل دی گئی ہے اس لیے انتہا میں کوئی فرق نہیں آتا اور اس کی انتہا اب بھی

صفر ہے اور تواتر کے چند ارکان کی قیمت بھی صفر ہے۔ یہ ایک خاص صورت ہے لیکن عام تواتر کے لیے ایسا ہونا ضروری نہیں ہے۔

**تعریف ۲**۔ ن مائل بہ لاتناہی ہو تو تواتر اُن، $+\infty$ (مثبت لاتناہی) کی طرف اُس وقت مائل ہوگا جبکہ اگر کتنا ہی بڑا اختیاری مثبت عدد گ دیا ہوا ہو تو ایک مثبت صحیح عدد نَ ایسا معلوم ہو سکے کہ اُنَ سے شروع کرکے اور بعد کے تمام ارکان کی قیمت گ سے بڑی ہو۔

اس صورت میں ہم یوں لکھتے ہیں کہ

نہا (ن $\to \infty$) اُن $= +\infty$ یا اُن $\to \infty$ جبکہ ن $\to \infty$،

**تعریف ۳**۔ ن مائل بہ لاتناہی ہو تو تواتر اُن، $-\infty$ (منفی لاتناہی) کی طرف اُس وقت مائل ہوگا جبکہ اگر کتنا ہی بڑا اختیاری مثبت عدد گ دیا ہوا ہو تو ایک مثبت صحیح عدد نَ ایسا معلوم ہو سکے کہ اُنَ سے شروع کرکے بعد کے تمام ارکان کی قیمت $-$گ سے کم ہو۔

اس صورت میں ہم لکھتے ہیں

نہا (ن $\to \infty$) اُن $= -\infty$ یا اُن $\to -\infty$ اگر ن $\to \infty$

ان دونوں صورتوں میں ہم کہتے ہیں اُن "متسع" ہے، مستدق نہیں ہے۔

**تعریف ۴**۔ اگر کسی تواتر اُن کی انتہا نہ تو محدود عدد ل ہو نہ وہ $+\infty$ یا $-\infty$ کی طرف مائل ہو تو کہا جاتا ہے کہ تواتر اُن اہتزاز کرتا ہے۔

مثلاً تواتر اُن $= (-1)^{ن}$ ن$^{2}$ اور تواتر اُن $= (-1)^{ن} + \frac{1}{ن}$ اہتزاز کرتے ہیں۔

# توضیحی مثالیں

## مثال (۱):۔ $ل_ن = ن^ک$

اس تواتر کے لیے ک کی قیمتوں کے لحاظ سے تین صورتیں پیدا ہوتی ہیں:

(ا) اگر ک کوئی مثبت صحیح عدد یا مثبت کسری عدد ہو مثلاً فرض کرو کہ ک = ۴، اگر ہم چاہیں کہ $ن^۴$ کی قیمت ۱۰۰۰ سے بڑی ہو تو ظاہر ہے کہ ن کو ۱۱ کے مساوی لینا کافی ہے اور $ل_{۱۱}$ سے شروع کرکے باقی تمام ارکان ۱۰۰۰ سے بڑے ہیں۔ اگر ہم چاہیں کہ $ن^۴$ کی قیمت ۱۰۰۰۰۰۰۰۰ سے بڑی ہو تو ن کو ۱۰۱ کے مساوی لینا کافی ہے کیونکہ $ل_{۱۰۱}$ سے شروع کرکے باقی تمام ارکان ۱۰۰۰۰۰۰۰۰ سے بڑے ہیں۔ علی ہٰذا القیاس ہم چاہے کتنا ہی بڑا مثبت عدد گ لیں ہم ایک $نَ$ ایسا معلوم کر سکتے ہیں کہ $ل_ن > گ$ جبکہ $ن \geq نَ$ ۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ک کی مثبت قیمتوں کے لیے تواتر $ل_ن = ن^ک$ کی انتہا $+\infty$ ہے۔

(ب) اگر ک = ۰ تو $ل_ن = ن^۰ = ۱$ یعنی تواتر کا ہر رکن ۱ کے مساوی ہے اس لیے اس کی انتہا بھی ۱ ہے۔

(ج) اگر ک کوئی منفی صحیح عدد یا منفی کسر ہے تو فرض کرو کہ ک = ـــ م جہاں م ایک مثبت عدد ہے۔ پس

$$ل_ن = ن^ک = ن^{-م} = \frac{۱}{ن^م}$$

چونکہ ہم صورت (ا) میں ثابت کر چکے ہیں کہ کسی مثبت قوت ک کے لیے $ن^ک$ کی انتہا $+\infty$ ہے پس جس قدر ن بڑھتا جائیگا اُسی قدر $ن^م$ بھی بڑھتا جائیگا اور اس لیے اِسی قدر $\frac{۱}{ن^م}$ چھوٹا ہوتا جائیگا۔

فرض کرو کہ ہم $\frac{۱}{ن^م}$ کو $\frac{۱}{۱۰۰۰۰۰۰۰۰}$ سے چھوٹا کرنا چاہتے ہیں۔

پس $ن^م > \frac{۱۰۰۰۰۰۰۰۰}{۱}$

یعنے ن > (۱۰۰۰۰۰۰۰۰) کا م واں جذر

غرض کہ ہم ن کو اس طرح انتخاب کر سکتے ہیں کہ $\frac{۱}{ن^م}$ جتنا چاہیں چھوٹا ہو جائے جس سے معلوم ہوتا ہے کہ $\frac{۱}{ن^م}$ یعنے $ن^ک$ کی انتہا صفر ہے اگر ک کوئی منفی عدد ہو۔

مثال ۲- $ل_ن = ۱ + \left\{ \frac{جب \frac{ن\pi}{۲}}{ن} \right\}$

ہم کو معلوم ہے کہ چاہے زاویہ طہ کچھ ہی ہو، جب طہ کی مطلق قیمت کبھی ۱ سے نہیں بڑھ سکتی۔ پس تواتر $ل_ن$ حسبِ ذیل دو تواتروں کے درمیان واقع ہوتا ہے

$$۱ - \frac{۱}{ن} \leqq ۱ + \frac{جب \frac{ن\pi}{۲}}{ن} \leqq ۱ + \frac{۱}{ن}$$

چونکہ دونوں تواتروں $۱ - \frac{۱}{ن}$ اور $۱ + \frac{۱}{ن}$ کی انتہا ۱ ہے اس لیے درمیانی تواتر $ل_ن$ کی انتہا بھی ۱ ہونی چاہیے۔ یہ اس طرح سے بھی ظاہر ہے کہ $\frac{جب \frac{ن\pi}{۲}}{ن}$ کی مطلق قیمت کو ہم جتنا چاہیں چھوٹا کر سکتے ہیں کیونکہ یہ قیمت $\frac{۱}{ن}$ کے مساوی یا اس سے کم ہے۔

مثال ۳- $ل_ن = ن^۲ \left\{ ۱ + (-۱)^ن \right\}$

چونکہ $(-۱)^ن = -۱$ اگر ن طاق عدد

$= +۱$ اگر ن جفت عدد

اس لیے

$ل_ن = ۰$ اگر ن طاق عدد

$= ۲ن^۲$ اگر ن جفت عدد

ظاہر ہے کہ تواتر کی انتہا $+\infty$ نہیں ہے کیونکہ لاتناہی ارکان

صفر ہیں ۔ نیز تواتر کی انتہا $-\infty$ یا محدود عدد بھی نہیں اس لیے معلوم ہوتا ہے کہ تواتر اہتزاز کرتا ہے ۔

## مشقی سوالات ۲

ذیل کے تواتروں کی انتہا معلوم کرو جبکہ ن مائل بہ لاتناہی ہو ۔

(۱) $\text{ا}_{\text{ن}} = \frac{\text{۱۰۰۰۰۰۰۰۰}}{\text{ن}}$

(۲) $\text{ا}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{\text{۱۰۰۰۰۰۰۰۰}}$

(۳) $\text{ا}_{\text{ن}} = \frac{\text{جب ن ط}}{\text{ن}} ،\ \frac{\text{جب ن ط}}{\sqrt{\text{ن}}} ،\ \frac{\text{جب ن ط}}{\text{ن}^{۲}}$

(۴) $\text{ا}_{\text{ن}} = \frac{\text{ا جم}^{۲}\text{ن ط} + \text{ن جب}^{۲}\text{ن ط}}{\text{ن}}$ (ا، ب اور ط کوئی حقیقی عدد ہیں)

(۵) $\text{ا}_{\text{ن}} = \frac{۱}{\text{ن} - (-۱)^{\text{ن}}}$

(۶) $\text{ا}_{\text{ن}} = \text{ن} - (-۱)^{\text{ن}}$

(۷) $\text{ا}_{\text{ن}} = \text{ن}\left\{۱ - (-۱)^{\text{ن}}\right\}^{\text{ن}}$

(۸) ن کی وہ کم سے کم قیمت معلوم کرو جس کے لیے $\text{ن}^{۲} + \text{ن} > \text{۹۹۹۰۰۰}$

### ۴ر۱ - انتہا کے متعلق عام مسائل

۴ر۱ر۱ - مسئلہ ۱ - اگر تواتر $\text{ا}_{\text{ن}}$ کی انتہا ل ہو تو ن کی کافی بڑی قیمتوں کے لیے ہم لکھ سکتے ہیں

$$\text{ق}_{\text{ن}} = \text{ل} + \text{ک}_{\text{ن}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

جہاں کن کو ہم جتنا چاہیں چھوٹا بنا سکتے ہیں یعنے جہاں تواتر کن کی انتہا صفر ہے۔

فرض کرو کہ ح کوئی مثبت اختیاری چھوٹا دیا ہوا عدد ہے۔ اب

$$\text{ا}_{\text{ن}} = |\text{ق}_{\text{ن}} - \text{ل}| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

لیکن چونکہ قن تواتر ... ہے اس لیے تعریف کے بموجب ایک مثبت عدد صحیح عدد ن ایسا معلوم ہو سکتا ہے کہ م اور بعد کے تمام ارکان سے

$|\text{ق}_{\text{ن}} - \text{ل}| <$ ح ... ہے کن اور بعد کے تمام کن کے لیے

$$|\text{ا}_{\text{ن}}| < \text{ح}$$

$$|\text{ا}_{\text{ن}} - 0| < \text{ح} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

پس تعریف کے بموجب تواتر ان کی انتہا صفر ہے۔

اس مسئلہ کی مدد سے ہم دو تواتروں کے حاصل جمع، فرق، حاصل ضرب اور حاصل قسمت کی انتہائیں آسانی کے ساتھ معلوم کر سکتے ہیں۔ لیکن ان میں ہمیں اجتماعی ... عدم مساوات کی بھی ضرورت ہوتی ہے جس کو ہم یہاں ثابت کرتے ہیں۔

۳۴۔ مسئلہ ۲ اگر ر اور س کوئی مثبت یا منفی حقیقی عدد ہیں تو

$$|\text{ر} + \text{س}| \leq |\text{ر}| + |\text{س}| \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

یعنی الفاظ میں ر اور س کے مجموعہ کی مطلق قیمت ان کی علیحدہ علیحدہ مطلق قیمتوں کے مجموعہ سے کسی صورت میں بڑی نہیں ہو سکتی بلکہ یا تو مساوی

ہوگی یا کم ہوگی ۔ اس بدیہی مسئلہ کو ہم مثالوں کے ذریعہ سے واضح کرینگے ۔ فرض کرو کہ

$\text{ر} = \frac{۱۱}{۳}$ ، اور $\text{س} = -\frac{۳۵}{۹}$ ، تب

$$|\text{ر} + \text{س}| = \left|\frac{۱۱}{۳} - \frac{۳۵}{۹}\right| = \left|-\frac{۲}{۹}\right| = \frac{۲}{۹}$$

اور

$$|\text{ر}| + |\text{س}| = \left|\frac{۱۱}{۳}\right| + \left|-\frac{۳۵}{۹}\right| = \frac{۱۱}{۳} + \frac{۳۵}{۹} = \frac{۶۸}{۹}$$

چونکہ $\frac{۲}{۹} < \frac{۶۸}{۹}$

اس لیے اس صورت میں $|\text{ر} + \text{س}| < |\text{ر}| + |\text{س}|$ اور مسئلہ صحیح ہے ۔

اب فرض کرو کہ $\text{ر} = \frac{۱۱}{۳}$ ، $\text{س} = \frac{۳۵}{۹}$ ، اس لیے

$$|\text{ر} + \text{س}| = \left|\frac{۱۱}{۳} + \frac{۳۵}{۹}\right| = \left|\frac{۶۸}{۹}\right| = \frac{۶۸}{۹}$$

اور $|\text{ر}| + |\text{س}| = \left|\frac{۱۱}{۳}\right| + \left|\frac{۳۵}{۹}\right| = \frac{۱۱}{۳} + \frac{۳۵}{۹} = \frac{۶۸}{۹}$

اس لیے اس صورت میں $|\text{ر} + \text{س}| = |\text{ر}| + |\text{س}|$ اور اب بھی مسئلہ صحیح ہے ۔

بالآخر اگر $\text{ر} = -\frac{۱۱}{۳}$ اور $\text{س} = -\frac{۳۵}{۹}$ تو

$$|\text{ر} + \text{س}| = \left|-\frac{۱۱}{۳} - \frac{۳۵}{۹}\right| = \left|-\frac{۶۸}{۹}\right| = \frac{۶۸}{۹}$$

$$|\text{ر}| + |\text{س}| = \left|-\frac{۱۱}{۳}\right| + \left|-\frac{۳۵}{۹}\right| = \frac{۱۱}{۳} + \frac{۳۵}{۹} = \frac{۶۸}{۹}$$

اس صورت میں بھی $|\text{ر} + \text{س}| = |\text{ر}| + |\text{س}|$

پس ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ر اور س دونوں مثبت یا دونوں منفی ہیں تو $|\text{ر} + \text{س}| = |\text{ر}| + |\text{س}|$ لیکن اگر ر اور س میں سے کوئی ایک منفی اور دوسرا مثبت ہے تو $|\text{ر} + \text{س}| < |\text{ر}| + |\text{س}|$

**۴۳ء۱ ۔ مسئلہ ۳** — اگر ایک تواتر $\text{ا}_{\text{ن}}$ کی انتہا ل اور

دوسرے تواتر $\text{ب}_{\text{ن}}$ کی انتہا ب ہو تو تواتر $(\text{ا}_{\text{ن}} + \text{ب}_{\text{ن}})$ کی انتہا $(\text{ا} + \text{ب})$ ہوگی۔

فرض کرو کہ صہ کوئی دیا ہوا چھوٹا مثبت عدد ہے۔ تب چونکہ $\text{ا}_{\text{ن}}$ کی انتہا ا ہے اس لیے ایک صحیح عدد $\text{ن}_1$ ایسا معلوم ہو سکتا ہے کہ

$$|\text{ا}_{\text{ن}} - \text{ا}| < \frac{\text{صہ}}{۲} \quad \text{جبکہ} \quad \text{ن} \geq \text{ن}_1 \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

اسی طرح چونکہ $\text{ب}_{\text{ن}}$ کی انتہا ب ہے اس لیے ایک صحیح عدد $\text{ن}_2$ ایسا معلوم ہو سکتا ہے کہ

$$|\text{ب}_{\text{ن}} - \text{ب}| < \frac{\text{صہ}}{۲} \quad \text{جبکہ} \quad \text{ن} \geq \text{ن}_2 \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

$\text{ن}_1$ اور $\text{ن}_2$ میں سے جو عدد بڑا ہو اس کو ہم نَ سے تعبیر کرتے ہیں۔ تو ظاہر ہے کہ نَ اور اس سے بڑی قیمتوں کے لیے (۱) اور (۲) بیک وقت پورے ہوتے ہیں۔

اب مسئلہ (۲) کی رو سے ہم دیکھتے ہیں کہ ن کی ہر قیمت کے لیے

$$|(\text{ا}_{\text{ن}} + \text{ب}_{\text{ن}}) - (\text{ا} + \text{ب})| = |(\text{ا}_{\text{ن}} - \text{ا}) + (\text{ب}_{\text{ن}} - \text{ب})|$$

$$\leq |\text{ا}_{\text{ن}} - \text{ا}| + |\text{ب}_{\text{ن}} - \text{ب}|$$

اس لیے مساواتوں (۵) اور (۶) سے ظاہر ہے کہ

$$|(\text{ا}_{\text{ن}} + \text{ب}_{\text{ن}}) - (\text{ا} + \text{ب})| < \frac{\text{صہ}}{۲} + \frac{\text{صہ}}{۲}$$

$$< \text{صہ} \quad \text{جبکہ} \quad \text{ن} \geq \text{نَ}$$

پس تعریف کے بموجب

$$\underset{\text{ن} \to \infty}{\text{نہا}} (\text{ا}_{\text{ن}} + \text{ب}_{\text{ن}}) = \text{ا} + \text{ب}$$

اس مسئلہ کو الفاظ میں ہم یوں بیان کر سکتے ہیں کہ دو تواتروں کے

حاصل جمع کی انتہا دونوں کی انتہاؤں کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے۔

اس مسئلہ کا ایک زیادہ مختصر ثبوت جو اگرچہ اس قدر مکمل نہیں ہے حسب ذیل ہے:-

چونکہ $ا_ن$ کی انتہا ا ہے اس لیے ن کی کافی بڑی قیمتوں کے لیے

$$ا_ن = ا + صہ_۱$$

اس طرح

$$ب_ن = ب + صہ_۲$$

جہاں $صہ_۱$ اور $صہ_۲$ کو ہم مسئلہ (۱) کی بنا پر جتنا چاہیں چھوٹا کر سکتے ہیں۔ پس

$$ا_ن + ب_ن = (ا + صہ_۱) + (ب + صہ_۲) = (ا + ب) + (صہ_۱ + صہ_۲)$$

اس لیے

$$|(ا_ن + ب_ن) - (ا + ب)| = |صہ_۱ + صہ_۲| < صہ$$

کیونکہ $صہ_۱ + صہ_۲$ کو ہم جتنا چاہیں چھوٹا کر سکتے ہیں۔ جس سے مسئلہ ظاہر ہے۔

**مثال ۱۔** فرض کرو کہ $ا_ن = \frac{۱}{ن}$، $ب_ن = \frac{۱}{۲ن^۲}$ پس $ا_ن + ب_ن = \frac{۱}{ن} + \frac{۱}{۲ن^۲}$

$$ا_ن \to ۰،\quad ب_ن \to ۰ \quad \text{اور} \quad ا_ن + ب_ن \to ۰$$

$ا_ن + ب_ن$ کی انتہا صفر ثابت کرنے کے لیے ہم کوئی عدد صہ جتنا چاہیں چھوٹا لیتے ہیں۔ اب

$\frac{۱}{ن} + \frac{۱}{۲ن^۲} < صہ$ اگر $\frac{۱}{ن} + \frac{۱}{۲ن^۲} - صہ < ۰$ یعنے اگر $۱ + ۲ن - ۲صہ ن^۲ < ۰$

یعنے اگر $۲صہ ن^۲ - ۲ن - ۱ > ۰$

پس مساوات $۲\,\text{صہ}\,\text{ن}^{۲} - ۲\,\text{ن} - ۱ = ۰$ سے ن کی جو مثبت قیمت حاصل ہوتی ہے اس سے بڑی صحیح قیمت لی جائے تو اس سے شروع کر کے بعد کے تمام ن کے لیے $\frac{۱}{\text{ن}} + \frac{۱}{۲\text{ن}^{۲}} < \text{صہ}$ اس لیے ثابت ہوا کہ $\text{ا}_{\text{ن}} + \text{ب}_{\text{ن}}$ کی انتہا صفر ہے جو دونوں انتہاؤں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔

مثال ۲ - $\text{ا}_{\text{ن}} = \left(۱ - \frac{۱}{\text{ن}}\right)$، $\text{ب}_{\text{ن}} = \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲\text{ن}^{۲}}\right)$

$$\text{ا}_{\text{ن}} + \text{ب}_{\text{ن}} = \frac{۳}{۲} - \left(\frac{۱}{\text{ن}} + \frac{۱}{۲\text{ن}^{۲}}\right)$$

اب ظاہر ہے کہ $\text{ا}_{\text{ن}} \rightarrow ۱$، $\text{ب}_{\text{ن}} \rightarrow \frac{۱}{۲}$

اور

$$\frac{۳}{۲} - (\text{ا}_{\text{ن}} + \text{ب}_{\text{ن}}) = \frac{۱}{\text{ن}} + \frac{۱}{۲\text{ن}^{۲}}$$

ابھی مثال ۱ میں ہم نے ثابت کیا ہے کہ ہم ایک نَ ایسا معلوم کر سکتے ہیں کہ اس سے شروع کر کے اور بعد کے تمام ن کے لیے

$\frac{۱}{\text{ن}} + \frac{۱}{۲\text{ن}^{۲}} < \text{صہ}$ جہاں صہ کوئی چھوٹا عدد ہے۔

پس اس نَ کے لیے اور بعد کے تمام ن کے لیے $\frac{۳}{۲}$ اور $(\text{ا}_{\text{ن}} + \text{ب}_{\text{ن}})$ کا فرق صہ سے کم ہے اس لیے تعریف کے بموجب $(\text{ا}_{\text{ن}} + \text{ب}_{\text{ن}})$ کی انتہا $\frac{۳}{۲}$ ہے جو $\text{ا}_{\text{ن}}$ اور $\text{ب}_{\text{ن}}$ کی انتہاؤں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔

اوپر کی دونوں مثالوں سے مسئلہ ۳ کی تصدیق ہوتی ہے۔

**نوٹ ۱** ۔ اوپر جو ثبوت ہم نے دو تواتروں کے لیے دیا ہے اس کو آسانی سے تین یا زیادہ تواتروں کے لیے وسیع کیا جا سکتا ہے جس سے ظاہر ہے کہ یہ مسئلہ تواتروں کی کسی محدود تعداد کے لیے صحیح ہے۔ لیکن تواتروں کی لاتناہی تعداد کے لیے یہ مسئلہ صحیح نہیں رہتا۔

مثلاً تواتروں

$$\frac{1}{\text{ن}^2},\ \frac{2}{\text{ن}^2},\ \frac{3}{\text{ن}^2},\ \ldots\ldots,\ \frac{\text{ن}}{\text{ن}^2}$$

پر غور کرو - ان میں سے ہر تواتر کی انتہا صفر ہے اس لیے انتہاؤں کا مجموعہ بھی صفر ہے چاہے ن کوئی عدد ہو - لیکن اگر ان تواتروں کا مجموعہ لیا جائے تو

$$\frac{1}{\text{ن}^2}+\frac{2}{\text{ن}^2}+\cdots+\frac{\text{ن}}{\text{ن}^2}=\frac{1}{\text{ن}^2}(1+2+3+\cdots+\text{ن})=\frac{\text{ن}(\text{ن}+1)}{2\,\text{ن}^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\,\text{ن}}$$

اور ظاہر ہے کہ اس مجموعہ کی انتہا $\frac{1}{2}$ ہے - یعنے مجموعہ کی انتہا، انتہاؤں کے مجموعہ کے مساوی نہیں ہے - اس کی وجہ یہ ہے کہ جب ہم مجموعے کی انتہا لیتے ہیں یعنی ن کو بہت بڑا کرتے ہیں تو چونکہ تواتروں کی تعداد ن ہے اس لیے یہ تعداد بھی لا متناہی ہو جاتی ہے -

**نوٹ ۲** - بعینہ اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ دو تواتروں کے فرق کی انتہا، انتہاؤں کے فرق کے مساوی ہوتی ہے یعنے

$$\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\left(\text{ا}_{\text{ن}}-\text{ب}_{\text{ن}}\right)=\text{ا}-\text{ب}$$

**۱ر۴۴ - مسئلہ ۴** - اگر تواتر $\text{ا}_{\text{ن}}$ کی انتہا ا اور تواتر $\text{ب}_{\text{ن}}$ کی انتہا ب ہو تو تواتر $(\text{ا}_{\text{ن}}\,\text{ب}_{\text{ن}})$ کی انتہا ا ب ہوگی، یعنے دو تواتروں کے حاصل ضرب کی انتہا، انتہاؤں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوگی -

چونکہ $\text{ا}_{\text{ن}}$ کی انتہا ا ہے اور $\text{ب}_{\text{ن}}$ کی انتہا ب ہے اس لیے ن کی کافی بڑی قیمتوں کے لیے مسئلہ (۱) کی رو سے

$$\text{ا}_{\text{ن}}=\text{ا}+\text{ص}_1\ ،\ \text{جہاں}\ \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\ \text{ص}_1=0$$

$$\text{ب}_{\text{ن}}=\text{ب}+\text{ص}_2\ ،\ \text{جہاں}\ \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\ \text{ص}_2=0$$

$$\therefore\ \text{ا}_{\text{ن}}\,\text{ب}_{\text{ن}}=(\text{ا}+\text{ص}_1)(\text{ب}+\text{ص}_2)=\text{ا ب}+(\text{ص}_1\text{ب}+\text{ص}_2\text{ا}+\text{ص}_1\text{ص}_2)$$

$$\therefore\ \left|\text{ا}_{\text{ن}}\,\text{ب}_{\text{ن}}-\text{ا ب}\right|=\left|\text{ص}_1\text{ب}+\text{ص}_2\text{ا}+\text{ص}_1\text{ص}_2\right|$$

اب چونکہ صہ۱ اور صہ۲ کی انتہا صفر ہے اس لیے ہم ن کی ایک کافی بڑی قیمت نَ ایسی معلوم کر سکتے ہیں کہ اگر صہ کوئی اختیاری چھوٹا مثبت عدد دیا ہوا ہو تو

$$\left|\text{صہ}_۱\,\text{ب} + \text{صہ}_۲\,\text{ا} + \text{صہ}_۱\,\text{صہ}_۲\right| < \text{صہ}$$

پس

$$\left|\text{ا}_\text{ن}\,\text{ب}_\text{ن} - \text{ا}\,\text{ب}\right| < \text{صہ} \quad \text{جبکہ} \quad \text{ن} \geqslant \text{نَ}$$

یعنی ایک نَ سے شروع کرکے بعد کے تمام ن کے لیے $\text{ا}_\text{ن}\text{ب}_\text{ن}$ اور ا ب کا فرق صہ سے چھوٹا ہے اس لیے انتہا کی تعریف کی رُو سے $\text{ا}_\text{ن}\text{ب}_\text{ن}$ کی انتہا ا ب ہے۔ اس سے مسئلہ ثابت ہوجاتا ہے۔

نوٹ۔ مسئلہ ۳ کی طرح اس مسئلہ کو بھی دو سے زیادہ تواتروں کے لیے وسیع کیا جا سکتا ہے، یعنی تواتروں کی کسی تعداد کے حاصل ضرب کی انتہا انتہاؤں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

مثال۔ $\text{ا}_\text{ن} = \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{\text{ن}}\right)$، $\text{ب}_\text{ن} = \frac{۳\text{ن}^۲ - ۱}{۴\text{ن}^۲} = \left(\frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۴\text{ن}^۲}\right)$

$$\text{ا}_\text{ن}\,\text{ب}_\text{ن} = \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{\text{ن}}\right)\left(\frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۴\text{ن}^۲}\right) = \frac{۳}{۸} - \frac{۳}{۴\text{ن}} - \frac{۱}{۸\text{ن}^۲} + \frac{۱}{۴\text{ن}^۳}$$

لیکن چونکہ $\frac{۳}{۴\text{ن}} \to ۰$، $\frac{۱}{۸\text{ن}^۲} \to ۰$، $\frac{۱}{۴\text{ن}^۳} \to ۰$

اس لیے $\text{ا}_\text{ن}\,\text{ب}_\text{ن} \to \frac{۳}{۸} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۴}$

۱،۴۵۔ **مسئلہ ۵۔** اگر تواتر $\text{ا}_\text{ن}$ کی انتہا ا ہو اور ا کی قیمت صفر نہ ہو تو تواتر $\frac{۱}{\text{ا}_\text{ن}}$ کی انتہا $\frac{۱}{\text{ا}}$ ہوگی۔

چونکہ $\text{ا}_\text{ن}$ کی انتہا ا ہے اس لیے ن کی کافی بڑی قیمت کے لیے

$$\text{ا}_\text{ن} = \text{ا} + \text{صہ}_۱ \quad \text{جہاں} \quad \text{نہا}_{\text{ن}\to\infty}\,\text{صہ}_۱ = ۰\,.$$

اس لیے

$$\frac{1}{\text{ل}_\text{ن}} - \frac{1}{\text{ل}} = \frac{1}{\text{ل}+\text{صہ}_1} - \frac{1}{\text{ل}} = \frac{\text{ل}-\text{ل}-\text{صہ}_1}{\text{ل}(\text{ل}+\text{صہ}_1)} = \frac{-\text{صہ}_1}{\text{ل}(\text{ل}+\text{صہ}_1)}$$

$$\therefore \left|\frac{1}{\text{ل}_\text{ن}} - \frac{1}{\text{ل}}\right| = \left|\frac{\text{صہ}_1}{\text{ل}(\text{ل}+\text{صہ}_1)}\right|$$

اب چونکہ صہ$_1$ کی انتہا صفر ہے اس لیے ن کی ایک قیمت نَ ایسی معلوم ہو سکتی ہے کہ نَ سے شروع کرکے باقی تمام ن کے لیے $\left|\frac{\text{صہ}_1}{\text{ل}(\text{ل}+\text{صہ}_1)}\right| < \text{صہ}$ جہاں صہ کوئی اختیاری چھوٹا عدد ہے۔ پس

$$\left|\frac{1}{\text{ل}_\text{ن}} - \frac{1}{\text{ل}}\right| < \text{صہ} \quad \text{جبکہ ن} \geq \text{نَ}$$

یعنے تعریف کے بموجب $\frac{1}{\text{ل}_\text{ن}}$ کی انتہا $\frac{1}{\text{ل}}$ ہے۔

**مثال** ۔ فرض کرو کہ $\text{ل}_\text{ن} = \frac{1}{۲} - \frac{1}{\text{ن}} = \frac{\text{ن}-۲}{۲\text{ن}}$

$$\frac{1}{\text{ل}_\text{ن}} = \frac{۲\text{ن}}{\text{ن}-۲} = ۲\,\frac{\text{ن}}{\text{ن}-۲} = ۲\left\{\frac{\text{ن}-۲+۲}{\text{ن}-۲}\right\}$$

$$= ۲\,\frac{\text{ن}-۲}{\text{ن}-۲} + ۲\,\frac{۲}{\text{ن}-۲} = ۲ + \frac{۴}{\text{ن}-۲}$$

تب

$$\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\ \text{ل}_\text{ن} = \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\left(\frac{1}{۲} - \frac{1}{\text{ن}}\right) = \frac{1}{۲}$$

اور

$$\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\ \frac{1}{\text{ل}_\text{ن}} = \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\left(۲ + \frac{۴}{\text{ن}-۲}\right) = ۲$$

۱،۴۶ - **مسئلہ ۶** - اگر تواتر ل$_\text{ن}$ کی انتہا ل اور تواتر ب$_\text{ن}$ کی انتہا ب ہو اور ل $\neq$ ۰ تو تواتر $\frac{\text{ب}_\text{ن}}{\text{ل}_\text{ن}}$ کی انتہا $\frac{\text{ب}}{\text{ل}}$ ہوگی، یعنے دو تواتروں کے خارج قسمت کی انتہا، انتہاؤں کے خارج قسمت کے مساوی ہوگی۔

اس کا ثبوت مسئلہ (۴) اور مسئلہ (۵) کی مدد سے بآسانی مل سکتا ہے۔

چونکہ

$$\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\ \text{ژ}_{\text{ن}} = \text{ژ}\ (\neq \text{۰})$$

اس لیے

$$\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\ \frac{\text{۱}}{\text{ژ}_{\text{ن}}} = \frac{\text{۱}}{\text{ژ}} \quad \text{(مسئلہ (۵) کی رو سے)}$$

اب چونکہ

$$\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\ \text{ب}_{\text{ن}} = \text{ب} \quad \text{اور} \quad \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\ \frac{\text{۱}}{\text{ژ}_{\text{ن}}} = \frac{\text{۱}}{\text{ژ}}$$

اس لیے

$$\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\left\{\text{ب}_{\text{ن}} \times \frac{\text{۱}}{\text{ژ}_{\text{ن}}}\right\} = \text{ب} \times \frac{\text{۱}}{\text{ژ}} \quad \text{(مسئلہ (۴) کی رو سے)}$$

جس سے مسئلہ ثابت ہو جاتا ہے۔

مثال۔ فرض کرو کہ $\text{ژ}_{\text{ن}} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}} - \frac{\text{۱}}{\text{ن}}$ ؛ $\text{ب}_{\text{ن}} = \frac{\text{۳}}{\text{۴}} - \frac{\text{۱}}{\text{۴ن}^{\text{۲}}}$

پس

$$\frac{\text{ب}_{\text{ن}}}{\text{ژ}_{\text{ن}}} = \left(\frac{\text{۳}}{\text{۴}} - \frac{\text{۱}}{\text{۴ن}^{\text{۲}}}\right) \div \left(\frac{\text{۱}}{\text{۲}} - \frac{\text{۱}}{\text{ن}}\right) = \left(\frac{\text{۳ن}^{\text{۲}} - \text{۱}}{\text{۴ن}^{\text{۲}}}\right) \div \left(\frac{\text{ن} - \text{۲}}{\text{۲ن}}\right)$$

$$= \frac{\text{۳ن}^{\text{۲}} - \text{۱}}{\text{۴ن}^{\text{۲}}} \times \frac{\text{۲ن}}{\text{ن} - \text{۲}} = \frac{\text{۳ن}^{\text{۲}} - \text{۱}}{\text{۲ن}(\text{ن} - \text{۲})} = \frac{\text{۳ن}^{\text{۲}} - \text{۱}}{\text{۲ن}^{\text{۲}} - \text{۴ن}}$$

$$= \frac{\text{ن}^{\text{۲}}\left(\text{۳} - \frac{\text{۱}}{\text{ن}^{\text{۲}}}\right)}{\text{ن}^{\text{۲}}\left(\text{۲} - \frac{\text{۴}}{\text{ن}}\right)} = \frac{\text{۳} - \frac{\text{۱}}{\text{ن}^{\text{۲}}}}{\text{۲} - \frac{\text{۴}}{\text{ن}}}$$

پس

$$\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\ \frac{\text{ب}_{\text{ن}}}{\text{ژ}_{\text{ن}}} = \frac{\text{۳}}{\text{۲}} = \frac{\text{۳}}{\text{۴}} \div \frac{\text{۱}}{\text{۲}}$$

## مشقی سوالات ۳

ذیل کے تواتروں کی انتہائیں دریافت کرو۔

(۱) $\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲^{۲}} + \frac{۱}{۲^{۳}} + \cdots + \frac{۱}{۲^{ن}}$

(۲) $\frac{ن^{۲} + ۱}{۳ن^{۲} - ۴ن + ۵}$

(۳) $\frac{۱ + ۲ + ۳ + \cdots + ن}{(ن - ۱)^{۲}}$

(۴) $\frac{۱^{۲} + ۲^{۲} + \cdots + ن^{۲}}{ن^{۳}}$

(۵) $\frac{۱^{۳} + ۲^{۳} + \cdots + ن^{۳}}{ن^{۴}}$

(۶) $(-۱)^{ن} + ۲^{-ن}$

(۷) لاتناہی سلسلہ $۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۱۶} - \frac{۱}{۳۲} + \cdots$ کا حاصل جمع دریافت کرو۔

(۸) لاتناہی سلسلہ $\frac{۳}{۱۰} + \frac{۳}{۱۰۰} + \frac{۳}{۱۰۰۰} + \frac{۳}{۱۰۰۰۰} + \cdots$ کا حاصل جمع دریافت کرو۔

## ۱ر۴۷ ۔ نوٹ ۔ استدقاق کا عام اصول ۔

مندرجۂ بالا آسان مثالوں میں جن کا ہم نے خاص طور پر انتخاب کیا ہے تواتر جس انتہا کی طرف مائل ہوتا ہے وہ انتہا محض دیکھنے سے واضح ہو جاتی ہے۔ لیکن عام صورت میں یہ سوال اس قدر آسان نہیں ہے اور ایک دیے ہوئے تواتر کے متعلق یہی بات دریافت طلب اور اہم ہوتی ہے کہ آیا اس تواتر کی کوئی انتہا بھی ہے یا نہیں۔ دفعہ ۱ر۳۱ میں انتہا کی جو تعریف دی گئی ہے وہ اس وقت کام دیتی ہے جبکہ ہم کو کسی طریقہ سے انتہا کی قیمت معلوم ہو۔ عام تواتر کے

استدقاق یا عدم استدقاق کے دریافت کرنے کے لیے یہ تعریف معیار کا کام نہیں دے سکتی بلکہ اس کے لیے حسب ذیل خاصیت سے فائدہ اٹھایا جاتا ہے :۔

فرض کرو کہ تواتر

$$ا_۱ ، ا_۲ ، ا_۳ \ldots\ldots ، ا_ن ، \ldots\ldots \quad (۱)$$

مستدق ہے اور اس کی انتہا ل ہے۔ (یہاں ل کی ٹھیک قیمت سے بحث نہیں اور اس لیے ل کا معلوم ہونا ضروری نہیں ہے کوئی حرف اس کام کو پورا کر سکتا ہے)۔
اب اگر صہ کوئی اختیاری چھوٹا مثبت عدد دیا ہوا ہو تو تعریف کے بموجب ایک مثبت صحیح عدد نَ ایسا معلوم ہو سکتا ہے کہ $ا_ن$ سے شروع کر کے باقی تمام ارکان کے لیے $ا_ن$ اور ل کا فرق $\frac{صہ}{۲}$ سے چھوٹا ہو یعنے

$$|ا_ن - ل| < \frac{صہ}{۲} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۲)$$

اور

$$|ا_{ن+۱} - ل| < \frac{صہ}{۲} ، |ا_{ن+۲} - ل| < \frac{صہ}{۲} ، |ا_{ن+۳} - ل| < \frac{صہ}{۲} \ldots \quad (۳)$$

پس
$$|ا_ن - ا_{ن+۱}| = |(ا_ن - ل) - (ا_{ن+۱} - ل)|$$
$$\leq |ا_ن - ل| + |ا_{ن+۱} - ل|$$
$$< \frac{صہ}{۲} + \frac{صہ}{۲}$$
$$< صہ$$

اسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے کہ

$$|ا_ن - ا_{ن+۲}| < صہ$$

$$|ا_ن - ا_{ن+۳}| < صہ$$

$$|ا_ن - ا_{ن+م}| < صہ$$ ، جہاں م کوئی مثبت صحیح عدد ہے چاہے کتنا ہی بڑا ہو۔

یعنے اگر تواتر ( $l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$ ) مستدق ہے تو کسی چھوٹے عدد صہ کے لیے ایک رکن $l_{\overline{n}}$ ایسا معلوم کیا جا سکتا ہے کہ $l_{\overline{n}}$ سے شروع کرکے اور بعد کے تمام ارکان کے لیے یہ خاصیت پائی جاتی ہے کہ $l_{\overline{n}}$ اور ان میں سے کسی رکن کا فرق صہ سے چھوٹا ہوگا یعنے $|l_{\overline{n}} - l_{\overline{n}+1}|$ ، $|l_{\overline{n}} - l_{\overline{n}+2}|$ ، $|l_{\overline{n}} - l_{\overline{n}+3}|$ ... وغیرہ میں سے ہر ایک صہ سے چھوٹا ہوگا - اور چونکہ ہر اختیاری چھوٹے عدد صہ کے لیے یہ خاصیت صحیح ہے اس لیے ہر مستدق تواتر کے لیے ہم ایک رکن $l_{\overline{n}}$ کا ایسا انتخاب کر سکتے ہیں کہ $l_{\overline{n}}$ اور بعد کے کسی رکن کا فرق جتنا چاہیں چھوٹا ہو جائے۔

اس کے برعکس اگر کسی تواتر ( $l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$ ) میں یہ خاصیت پائی جائے کہ ہر چھوٹے مثبت عدد صہ کے لیے ایک رکن $l_{\overline{n}}$ ایسا معلوم ہو سکے کہ $l_{\overline{n}}$ اور بعد کے کسی رکن کا فرق صہ سے چھوٹا ہو جائے تو یہ تواتر مستدق ہوگا -

یہی استدقاق کا عام اصول ہے اور اس کو معیار کے طور پر استعمال کرکے ہم معلوم کر سکتے ہیں کہ آیا کوئی تواتر مستدق ہے یا نہیں -

ابتدائیوں کو اس خاصیت کے استعمال کرنے کی زیادہ ضرورت لاحق نہیں ہوگی - ان کو جن تواتروں سے سابقہ پڑتا ہے وہ اس قدر آسان ہونگے کہ ان کی انتہا محض جانچنے سے معلوم ہو سکتی ہے -

## ۱۵ - مسلسل متغیر کے تفاعل کی انتہا

۱۵ ء ۱ - اب تک ہم نے تواتروں یعنے ایک غیر مسلسل متغیر ن کے تفاعلوں $l_n$ کی انتہا سے بحث کی ہے - لیکن ایک مسلسل متغیر لا کے تفاعل ف (لا) کے متعلق بھی ہم کو اکثر انتہا کے مفہوم سے سابقہ پڑتا ہے اس لیے اب ہم تفاعل ف (لا) کی انتہا کی تشریح کرینگے -

فرض کرو کہ ف (لا) کی ترسیم کے ذریعہ ف (لا) کی قیمتوں کو ہم ایک منحنی کی شکل میں تعبیر کرتے ہیں - اور ایک نقطہ ن جس کا فصلہ لا ہے

منحنی پر اس طرح حرکت کرتا ہے کہ فصلہ لا بتدریج ایک ثابت عدد ج کے قریب تر آتا جاتا ہے۔ اب ایسا ہو سکتا ہے کہ تفاعل کی قیمت ف (لا) بھی ایک انتہا کے قریب آتی جائے۔ انتہا کے اس مفہوم کو ایک تواتر کی انتہا کے ساتھ ہم حسب ذیل طریقہ پر مربوط کر سکتے ہیں :-

"لا مائل بہ ج" کے معنی۔ فرض کرو کہ لا ایک مسلسل متغیر ہے اور ج ایک ثابت عدد ہے۔ فرض کرو کہ لا یکے بعد دیگرے قیمتوں لا۱، لا۲، لا۳ ....، لان، ... کو اختیار کرتا ہے جن میں سے سب کے سب ج سے مختلف ہیں لیکن نہا (ن ← ∞) لان = ج یعنے یہ قیمتیں اس طرح کی ہیں کہ لان کی انتہا ج ہے۔ اس کو ہم یوں بھی بیان کرتے ہیں "لا مائل بہ ج" ہے اور علامتوں میں اس کو لا ← ج سے تعبیر کرتے ہیں۔

مثلاً اگر ہم لا کو یکے بعد دیگرے قیمتیں ۱/۲، ۲/۳، ۳/۴، ۴/۵، ....، (ن-۱)/ن، ... دیں تو چونکہ (ن-۱)/ن کی انتہا ۱ ہے اس لیے ہم اس کو یوں بھی بیان کر سکتے ہیں کہ لا ← ۱ ہے۔ یعنے گویا ہم لا کی قیمت کو بڑھا کر بتدریج ۱ کے قریب لا رہے ہیں۔ لا کو ۱ کی طرف مائل کرنے کے لیے ہم لا کی قیمتوں کے اس تواتر کو دوسری طرح سے بھی منتخب کر سکتے ہیں۔ مثلاً اگر ہم لا کو یکے بعد دیگر حسب ذیل قیمتیں دیں :

۲، ۳/۲، ۴/۳، ۵/۴، ۶/۵، ....، (ن+۱)/ن، ....

اس لیے ظاہر ہے کہ ہم تواتر لا۱، لا۲، ...، لان، .... کا مختلف طریقوں سے انتخاب کر سکتے ہیں اور ہر صورت میں لان کی انتہا ج ہوگی یعنے لا ← ج ہوگا۔

تفاعل کی انتہا۔ لا کی ان قیمتوں کے جواب میں تفاعل ف (لا) کی قیمتوں کے لیے ذیل کا تواتر ملیگا :

ف (لا۱)، ف (لا۲)، ف (لا۳) .... ف (لان)، .....

اب اگر تواتر لا۱، لا۲ ... ، لان ... کے ہر انتخاب کے لیے تفاعل کی قیمتوں کے تواتر ف (لان) کی انتہا ل موجود ہو اور ہر صورت میں وہی ل ہو یعنے لان کے مختلف انتخاب کے لیے یہ انتہا مختلف نہ ہو تو ہم کہتے ہیں کہ جب لا مائل بہ ج ہو تو تفاعل ف (لا) کی انتہا ل ہے اور علامتوں میں اس کو یوں تعبیر کرتے ہیں :-

نہا (لا ← ج) ف (لا) = ل

**۱۵۲ - انتہا کی دوسری تعریف** — چونکہ انتہا کا مفہوم علمِ احصاء میں سب سے زیادہ اہم ہے اس لیے طالب علم کے ذہن نشین کرانے کے لیے ہم اس کی ایک اَور تعریف کرینگے جو اوپر کی تعریف کے بالکل معادل ہے۔

ف (لا) کی انتہا جبکہ لا مائل بہ ج ہو ل اس وقت ہوگی اگر صہ کوئی دیا ہوا چھوٹا عدد ہو تو نقطہ ج کے کافی قریب (یعنی فاصلہ ضہ پر) کے کسی نقطہ پر تفاعل کی قیمت اور ل کا فرق صہ سے چھوٹا ہو یعنے مختصر الفاظ میں ف (لا) کی انتہا جبکہ لا ← ج ہو ل ہوگی اگر ج کے کافی قریب کسی نقطہ پر تفاعل کی قیمت ف (لا) اور ل کا فرق جتنا چاہیں چھوٹا ہو سکے۔

انتہا کی تعریف میں یہ بات قابلِ غور ہے کہ ہم نقطۂ لا کو نقطۂ ج پر کبھی منطبق نہیں کرتے بلکہ اس کے جتنا چاہیں قریب لے آتے ہیں لیکن پھر بھی نقطۂ لا نقطۂ ج سے مختلف ہی ہوتا ہے۔ یعنی بالفاظِ دیگر نقطۂ ج پر تفاعل کی قیمت ف (ج) کو نہا (لا ← ج) ف (لا) سے بالعموم کوئی تعلق نہیں ہے۔ ف (ج) کی کیا قیمت ہے اس سے ہم کو یہاں بحث نہیں ہے۔ یہاں انتہا کے مفہوم میں سوال صرف یہ ہے کہ اگر ہم لا کو بتدریج عدد ج کے قریب لاتے جائیں (لیکن ہر صورت میں ج سے مختلف ہی رکھیں، چاہے یہ فرق کتنا ہی چھوٹا کیوں نہ ہو) تو کیا ف (لا) ایک محدود عدد ل کے قریب آتا ہے یا نہیں۔ بعض صورتوں میں ممکن ہے کہ یہ انتہا اور تفاعل کی قیمت ف (ج) دونوں ایک ہی ہوں لیکن

یہ محض حسنِ اتفاق ہے جو صرف چند خاص قسم کے تفاعلوں کے لیے واقع ہوگا جن کی ہم آئندہ تخصیص کریں گے ۔ عام طور پر یا تو ف (ج) کی قیمت غیر معین ہوگی یا ل سے مختلف ہوگی ۔

دوسری اہم بات جو انتہا کی تعریف میں یاد رکھنی چاہیے یہ ہے کہ نقطۂ لا کو نقطۂ ج کی طرف سیدھی یا بائیں طرف جدھر سے چاہیں لا سکتے ہیں ہر صورت میں وہی انتہا ل حاصل ہونی چاہیے ۔

مثال ۱ ۔ ف (لا) = ۳ لا^۲ ؛ ج = ۱٫۵ ؛ ل = ۶٫۷۵

یعنی تفاعل ۳ لا^۲ کی انتہا جبکہ لا ← ۱٫۵ ہو ۶٫۷۵ ہے ۔

اس کو ہم یوں ثابت کر سکتے ہیں کہ (۶٫۷۵ - ۳ لا^۲) جتنا چاہیں چھوٹا ہو سکتا ہے بشرطیکہ لا کو ۱٫۵ کے کافی قریب لیا جائے ۔ مثلاً فرض کرو کہ ہم کو ان دونوں کا فرق صہ سے چھوٹا کرنا چاہیے جہاں صہ کوئی چھوٹا مثبت عدد ہے ۔ ہم دریافت کر سکتے ہیں کہ ۱٫۵ کے قریب لا کی کونسی قیمت لی جائے کہ ۶٫۷۵ - ۳ لا^۲ کا فرق صہ سے چھوٹا ہو جائے ؛ فرض کرو کہ لا = ۱٫۵ - ھ تو گویا دریافت کرنا یہ ہے کہ ھ زیادہ سے زیادہ کس قدر ہو سکتا ہے کہ (۶٫۷۵ - ۳ لا^۲) < صہ ؛

پس

$$۶٫۷۵ - ۳ (۱٫۵ - ھ)^۲ < صہ$$

یعنی

$$۹ ھ - ۳ ھ^۲ < صہ$$

یعنی

$$۰ < ۳ ھ^۲ - ۹ ھ + صہ$$

$$< ھ^۲ - ۳ ھ + \frac{صہ}{۳}$$

$$< \left\{ ھ - \frac{۳ + \sqrt{۹ - \frac{۴}{۳} صہ}}{۲} \right\} \left\{ ھ - \frac{۳ - \sqrt{۹ - \frac{۴}{۳} صہ}}{۲} \right\}$$

اس کے لیے ظاہر ہے کہ ھ کو $\frac{\sqrt{9 - \frac{4}{3}ص} - 3}{2}$ سے کم ہونا چاہیے

یعنے اگر لا کو ہم ۱٫۵ - $\frac{\sqrt{9 - \frac{4}{3}ص} - 3}{2}$ کے درمیان کچھ ہی لیں

(۶٫۷۵ - ۳ لا$^2$) کا فرق ص سے کم ہوگا۔ ص جس قدر چھوٹا ہوتا ہے ھ بھی چھوٹا ہوتا چلا جاتا ہے لیکن پھر بھی صفر سے مختلف ہوتا ہے۔ پس

$$\text{نہا}_{\text{لا} \to ۱٫۵} \ ۳ \text{لا}^2 = ۶٫۷۵ \text{۔}$$

اس خاص مثال میں تفاعل ۳ لا$^2$ کی قیمت نقطۂ لا = ۱٫۵ پر ۳×(۱٫۵)$^2$ = ۶٫۷۵ ہے یعنے اس مثال میں انتہا اور قیمت دونوں ایک ہی ہیں۔

## مثال ۲- $\text{نہا}_{\text{لا} \to ۳} \frac{\text{لا}^2 - ۹}{\text{لا} - ۳}$

نقطۂ لا = ۳ پر تفاعل $\frac{\text{لا}^2 - ۹}{\text{لا} - ۳}$ کی قیمت $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ہو جاتی ہے جو غیر معین ہے کیونکہ $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ کا حاصل کوئی محدود عدد ہو سکتا ہے اس لیے کہ چاہے کسی محدود عدد کو صفر سے ضرب دیا جائے حاصل ضرب صفر ہی ہوگا۔

اب ہم $\frac{\text{لا}^2 - ۹}{\text{لا} - ۳}$ کی انتہا دریافت کرتے ہیں جبکہ متغیر لا نقطۂ ۳ کے قریب پہنچتا ہے۔ اس کے لیے ہم لا کی ایسی قیمتیں رکھتے ہیں جو بتدریج ۳ کے قریب آتی ہیں اور ان کے جواب میں ما = $\frac{\text{لا}^2 - ۹}{\text{لا} - ۳}$ کی قیمتوں پر غور کرتے ہیں۔ مثلاً

| | |
|---|---|
| اگر لا = ۲٫۹ تو ما = ۵٫۹ | اگر لا = ۲٫۹۹۹۹ تو ما = ۵٫۹۹۹۹ |
| اگر لا = ۲٫۹۹ تو ما = ۵٫۹۹ | اگر لا = ۲٫۹۹۹۹۹ تو ما = ۵٫۹۹۹۹۹ |
| اگر لا = ۲٫۹۹۹ تو ما = ۵٫۹۹۹ | اگر لا = ۲٫۹۹۹۹۹۹ تو ما = ۵٫۹۹۹۹۹۹ |

وغیرہ

اسی طرح اگر ہم لا کی ایسی قیمتیں لیں جو سیدھی طرف سے ۳ کے قریب آتی ہیں تو

ملتا ہے :-

| | |
|---|---|
| اگر لا = ۳٫۱ تو ما = ۶٫۱ | اگر لا = ۳٫۰۰۰۱ تو ما = ۶٫۰۰۰۱ |
| اگر لا = ۳٫۰۱ تو ما = ۶٫۰۱ | اگر لا = ۳٫۰۰۰۰۱ تو ما = ۶٫۰۰۰۰۱ |
| اگر لا = ۳٫۰۰۱ تو ما = ۶٫۰۰۱ | اگر لا = ۳٫۰۰۰۰۰۱ تو ما = ۶٫۰۰۰۰۰۱ |

وغیرہ

اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ چاہے لا بائیں طرف سے یا سیدھی طرف سے ۳ کی طرف مائل ہو $\frac{لا^2 - ۹}{لا - ۳}$ کی قیمت ۶ کے قریب آتی جا رہی ہے اور اگر ہم لا کو ۳ کے کافی قریب لیں تو $\frac{لا^2 - ۹}{لا - ۳}$ کو ۶ کے جس قدر چاہیں قریب لا سکتے ہیں پس معلوم ہوتا ہے کہ انتہا ۶ ہے یعنے

$$\underset{لا \to ۳}{نہا} \frac{لا^2 - ۹}{لا - ۳} = ۶$$

اس انتہا کو ہم دوسری طرح یوں معلوم کر سکتے ہیں :-

اگر ہم لا کو بالکل ۳ کے مساوی رکھیں تو ہم نے دیکھا ہے کہ تفاعل ما کی قیمت $\frac{صفر}{صفر}$ حاصل ہوتی ہے جو بے معنی ہے اس لیے ہم لا کو ۳ سے کسی قدر مختلف رکھتے ہیں مثلاً لا = ۳ + ھ جہاں ھ مثبت یا منفی کوئی چھوٹا عدد ہے ظاہر ہے کہ جب لا مائل بہ ۳ ہو تو ھ مائل بہ صفر ہوتا ہے - نیز چونکہ لا کی قیمت کبھی بالکل ۳ کے مساوی نہیں ہوتی اس لیے ھ کبھی بالکل صفر کے مساوی نہیں ہوتا۔ پس

$$ما = \frac{لا^2 - ۹}{لا - ۳} = \frac{(۳ + ھ)^2 - ۹}{(ھ + ۳) - ۳} = \frac{۶ ھ + ھ^2}{ھ} = ۶ + ھ$$

اب ھ کو کافی چھوٹا کرنے یعنے لا کو ۳ کے کافی قریب لانے سے ہم ما کو جس قدر چاہیں ۶ کے قریب لا سکتے ہیں - جس سے معلوم ہوتا ہے کہ ما کی انتہا ۶ ہے جبکہ لا ← ۳ ہو -

مثال ۲- $\underset{\text{لا} \to ۲}{\text{نہا}} \dfrac{\sqrt{۳-\text{لا}} - \sqrt{\text{لا}-۱}}{۶-۳\text{لا}}$

اگر تفاعل ف (لا) = ما = $\dfrac{\sqrt{۳-\text{لا}} - \sqrt{\text{لا}-۱}}{۶-۳\text{لا}}$ میں لا کی بجائے ۲ رکھا جائے تو اس کی قیمت بھی $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ہو جاتی ہے اس لیے ف (لا) کی قیمت نقطہ ۲ پر غیر معین ہے۔ اس لیے ہم پھر لا کی قیمت کو ۲ سے کسی قدر مختلف لیتے ہیں یعنے

$$\text{لا} = ۲ - \text{ھ}$$

رکھتے ہیں جہاں ھ ← ۰ جبکہ لا ← ۲ ہے یعنے جوں جوں لا عدد ۲ کے قریب آتا ہے اسی قدر ھ صفر کے قریب پہنچتا ہے - پس

$$\text{ما} = \frac{\sqrt{۳-۲+\text{ھ}} - \sqrt{۲-\text{ھ}-۱}}{۶-۳\,(۲-\text{ھ})} = \frac{\sqrt{۱+\text{ھ}} - \sqrt{۱-\text{ھ}}}{۳\text{ھ}}$$

اب چونکہ ھ کبھی بالکل صفر کے مساوی نہیں ہوتا اس لیے بائیں طرف کے جملہ کو اوپر اور نیچے $\sqrt{۱+\text{ھ}} + \sqrt{۱-\text{ھ}}$ سے ضرب دیتے ہیں تاکہ مقادیر اصم شمار کنندہ میں سے نکل جائیں۔

$$\text{ما} = \frac{(۱+\text{ھ}) - (۱-\text{ھ})}{۳\text{ھ}\left\{\sqrt{۱+\text{ھ}} + \sqrt{۱-\text{ھ}}\right\}} = \frac{۲\text{ھ}}{۳\text{ھ}\left\{\sqrt{۱+\text{ھ}} + \sqrt{۱-\text{ھ}}\right\}}$$

$$= \frac{۲}{۳} \cdot \frac{۱}{\sqrt{۱+\text{ھ}} + \sqrt{۱-\text{ھ}}}$$

اب ظاہر ہے کہ ھ جس قدر چھوٹا ہوتا جائیگا اُسی قدر جملہ $\dfrac{۱}{\sqrt{۱+\text{ھ}} + \sqrt{۱-\text{ھ}}}$ کی قیمت $\frac{۱}{۲}$ کے قریب آئیگی- پس جس قدر ھ چھوٹا

ہوتا جائیگا اسی قدر ما کی قیمت $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$ یعنے $\frac{1}{3}$ کے قریب آتی جائیگی۔
اس لیے مطلوبہ انتہا $\frac{1}{3}$ ہے یعنے

$$\text{نہا}_{لا \leftarrow 2} \frac{\sqrt{3-لا} - \sqrt{لا-1}}{6-3لا} = \frac{1}{3}$$

۵۳ ر ۱۔ مسئلہ ۱۔ اگر ما = $\frac{1}{لا}$ اور لا ← ۰ تو ا ← $\infty$

یعنے الفاظ میں ہم اس کو یوں بیان کر سکتے ہیں کہ اگر لا کی ہم کافی چھوٹی قیمت لیں تو ما کو جس قدر چاہیں بڑا بنا سکتے ہیں۔

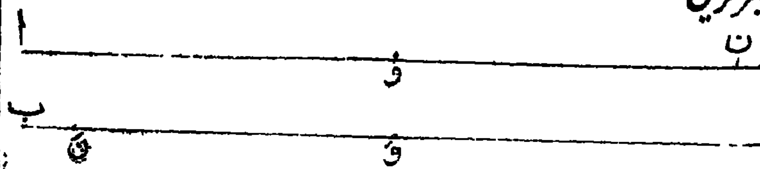
فرض کرو کہ گ کوئی بڑا عدد مثلاً (۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰) ہے اور ہم چاہتے ہیں کہ ما اس عدد سے بھی بڑا ہو جائے۔ چونکہ لا کی انتہا صفر ہے اس لیے ہم لا کو جتنا چاہیں چھوٹا بنا سکتے ہیں۔ مثلاً ہم لا کو (۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱ء) سے چھوٹا لیتے ہیں تب ما دیے ہوئے عدد گ سے بڑا ہو جائیگا۔

مسئلہ ۲۔ اگر ما = $\frac{1}{لا}$ اور لا ← $\infty$ تو ا ← ۰۔ یعنے

اگر لا کی قیمت کو ہم کافی بڑا لیں تو ما کی قیمت کو جس قدر چاہیں کم کر سکتے ہیں۔
مثلاً اگر ہم ما کی قیمت (۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱ء) سے چھوٹی کرنی چاہیں تو لا کو (۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰) سے بڑا لینا کافی ہوگا۔

مسئلہ ۳۔ اگر ما = ـ لا اور لا ← +$\infty$ تو ما ← ـ$\infty$؛

یعنے اگر ہم لا اور ما کی قیمتوں کو بالترتیب دو خطوطِ مستقیم ا اور ب پر تعبیر کریں




اور دونوں خطوں پر مبدار و (لا = ۰)، اور وَ (ما = ۰) ہوں تو خط ا پر

مبداء و سے سیدھی طرف بہت دُور فاصلہ پر ایک نقطہ ن کے جواب میں خط ب پر مبداء وَ سے بائیں طرف بہت دور فاصلہ پر ایک نقطہ نَ ملیگا۔

ان مسائل کی مدد سے ہم تفاعلوں کی انتہا دریافت کر سکتے ہیں جبکہ $\text{لا} \to +\infty$ یا $\text{لا} \to -\infty$ ہو۔

## مثال ۱۔ $\underset{\text{لا}\to\infty}{\text{نہیا}} \frac{1}{۴\,\text{لا}^{۲}}$

رکھو $\text{ما} = \frac{1}{\text{لا}}$ پس $\frac{1}{۴\,\text{لا}^{۲}} = \frac{1}{۴(\frac{1}{\text{ما}})^{۲}} = \frac{1}{۴}\,\text{ما}^{۲}$

نیز ہم کو مسئلہ ۲ سے معلوم ہے کہ اگر $\text{لا} \to \infty$ تو $\text{ما} \to ۰$۔

پس

$$\underset{\text{لا}\to\infty}{\text{نہیا}} \frac{1}{۴\,\text{لا}^{۲}} = \underset{\text{ما}\to ۰}{\text{نہیا}} \frac{1}{۴}\,\text{ما}^{۲} = ۰ \quad (\text{کیونکہ } \text{ما}^{۲} \to ۰ \text{ جبکہ } \text{ما} \to ۰)$$

## مثال ۲۔ $\underset{\text{لا}\to-\infty}{\text{نہیا}} \left(\frac{\text{لا}^{۳}+۲}{۲\,\text{لا}^{۳}}\right)$

رکھو $\text{ما} = -\text{لا}$ اور $\text{ما} \to +\infty$ جبکہ $\text{لا} \to -\infty$

پس

$$\underset{\text{لا}\to-\infty}{\text{نہیا}} \left(\frac{\text{لا}^{۳}+۲}{۲\,\text{لا}^{۳}}\right) = \underset{\text{ما}\to\infty}{\text{نہیا}} \left\{\frac{(-\text{ما})^{۳}+۲}{۲(-\text{ما})^{۳}}\right\} = \underset{\text{ما}\to\infty}{\text{نہیا}} \frac{-\text{ما}^{۳}+۲}{-۲\,\text{ما}^{۳}}$$

$$= \underset{\text{ما}\to\infty}{\text{نہیا}} \left(\frac{-\text{ما}^{۳}}{-۲\,\text{ما}^{۳}} + \frac{۲}{-۲\,\text{ما}^{۳}}\right)$$

$$= \underset{\text{ما}\to\infty}{\text{نہیا}} \left(\frac{1}{۲} - \frac{1}{\text{ما}^{۳}}\right)$$

$$= \frac{1}{۲}$$

**۱۵۴۔ مسئلہ۔** اگر ف (لا) اور فہ (لا) کوئی دو تفاعل ہوں اور اگر $\underset{\text{لا}\to\text{ج}}{\text{نہیا}}\ \text{ف}(\text{لا}) = \text{ل}$، $\underset{\text{لا}\to\text{ج}}{\text{نہیا}}\ \text{فہ}(\text{لا}) = \text{م}$ تو

(۱) $\underset{\text{لا} \to \text{ج}}{\text{نہا}}$ { ف (لا) + فہ (لا) } = ل + م

(۲) $\underset{\text{لا} \to \text{ج}}{\text{نہا}}$ { ف (لا) - فہ (لا) } = ل - م

(۳) $\underset{\text{لا} \to \text{ج}}{\text{نہا}}$ ف (لا) × فہ (لا) = ل × م

(۴) $\underset{\text{لا} \to \text{ج}}{\text{نہا}}$ $\frac{\text{ف (لا)}}{\text{فہ (لا)}} = \frac{\text{ل}}{\text{م}}$ (بشرطیکہ م ≠ ۰)

ان مسائل کا ثبوت اسی طریقہ پر دیا جا سکتا ہے جیسا کہ ہم نے دفعہ ۱۴ میں دو تواتروں کے لیے دیا ہے۔ ہم یہاں صرف مسئلہ (۱) یعنے حاصل جمع کے لیے یہ ثبوت دینگے۔ باقی تین مسئلوں کے لیے طالب علم کو یہ ثبوت بطور مشق خود فراہم کرنا چاہیے۔

چونکہ ف (لا) کی انتہا جبکہ لا ← ج ہو ل ہے اس لیے اگر ہم لا کو ج کے کافی قریب لیں تو ف (لا) اور ل کا فرق جتنا چاہیں چھوٹا کر سکتے ہیں، مثلاً فرض کرو کہ اگر لا کو ج کے قریب بقدر حہ سے کم کے لایا جائے تو ف (لا) اور ل کا فرق $\frac{\text{صہ}}{۲}$ سے چھوٹا ہو جاتا ہے یعنے

| ف (لا) - ل | < $\frac{\text{صہ}}{۲}$ جہاں صہ ایک اختیاری چھوٹا عدد ہے۔

اس طرح فرض کرو کہ اگر لا کو ج کے قریب بقدر ک سے کم کے لایا جائے تو فہ (لا) اور م کا فرق بھی $\frac{\text{صہ}}{۲}$ سے چھوٹا ہو جاتا ہے یعنے

| فہ (لا) - م | < $\frac{\text{صہ}}{۲}$

ان میں حہ اور ک دو چھوٹے مثبت عدد ہونگے۔ ان دونوں میں سے جو کوئی بھی چھوٹا ہو اس کو ضہ سے تعبیر کرو۔ تو اگر اب لا کو ج سے قریب بقدر ضہ سے کم کے لایا جائے تو اس نقطہ کے لیے اوپر کی نامساواتیں

بیک وقت پوری ہونگی اور اس لیے

$$|ف(لا) - ل| + |فہ(لا) - م| < صہ$$

بشرطیکہ لا اور ج کا فرق ضہ سے کم ہو۔ پس چونکہ

$$|\{ف(لا) + فہ(لا)\} - (ل+م)| \leqslant |ف(لا) - ل| + |فہ(لا) - م|$$

$$< صہ$$

اس لیے

$$\underset{لا \to ج}{نہا} \{ف(لا) + فہ(لا)\} = ل + م$$

اس مسئلہ کا حسب ذیل دوسرا ثبوت بھی دیا جا سکتا ہے جو اگرچہ اس قدر مکمل نہیں ہے لیکن زیادہ عام فہم ہے۔

چونکہ ف (لا) کی انتہا ل ہے جبکہ لا ← ج ہو اس لیے لا کو ج کے کافی قریب لانے پر ہم لکھ سکتے ہیں

$$ف(لا) = ل + صہ_1$$

جہاں $صہ_1$ کی قیمت لا پر منحصر ہوگی اور $صہ_1 \to$ ۰ جبکہ لا ← ج یعنے لا کو ج کے کافی قریب لانے پر $صہ_1$ کو کافی چھوٹا کیا جا سکتا ہے۔ اس طرح

$$فہ(لا) = م + صہ_2$$

جہاں $صہ_2 \to$ ۰ جبکہ لا ← ج ؛ پس

$$ف(لا) + فہ(لا) = (ل + صہ_1) + (م + صہ_2) = (ل+م) + (صہ_1 + صہ_2)$$

یعنے $|\{ف(لا) + فہ(لا)\} - (ل+م)| = |صہ_1 + صہ_2|$

اب ظاہر ہے کہ ہم لا کو ج کے اس قدر قریب لے سکتے ہیں کہ $صہ_1 + صہ_2$ کی مطلق قیمت جس قدر چاہیں چھوٹی ہو جائے یعنی صہ سے بھی چھوٹی ہو جائے　پس

$$\underset{\text{لا} \to \text{ج}}{\text{نہا}} \left\{ \text{ف (لا)} + \text{ف (لا)} \right\} = \text{ل} + \text{م}$$

## ۱ء۵۵ - مثالیں -

**مثال ۱ -** اگر $\text{ف (لا)} = \dfrac{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}} - ۲}{\text{لا} - ۱}$ تو $\underset{\text{لا} \to ۱}{\text{نہا}}$ ف (لا) معلوم کرو۔

ظاہر ہے کہ نقطۂ لا = ۱ پر تفاعل ف (لا) غیر معیّن ہے -

لیکن چند خاص نقطوں پر تفاعل کی قیمت کو ہم جدول کی شکل میں اس طرح ظاہر کر سکتے ہیں :-

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| لا = | ۱ء۱ | ۱ء۰۱ | ۱ء۰۰۱ | ۱ء۰۰۰۱ | ۱ء۰۰۰۰۱ | ۱ء۰۰۰۰۰۱ |
| ف (لا) = | ۱ء۴۸ | ۱ء۴۹۸ | ۱ء۴۹۹۸ | ۱ء۴۹۹۹۸ | ۱ء۴۹۹۹۹۸ | ۱ء۴۹۹۹۹۹۸ |

اگر لا کو بائیں طرف سے بتدریج ۱ کے قریب لایا جائے تو حسب ذیل جدول حاصل ہوتی ہے :-

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| لا = | ۰ء۹ | ۰ء۹۹ | ۰ء۹۹۹ | ۰ء۹۹۹۹ | ۰ء۹۹۹۹۹ | ۰ء۹۹۹۹۹۹ |
| ف (لا) = | ۱ء۵۱ | ۱ء۵۰۱ | ۱ء۵۰۰۱ | ۱ء۵۰۰۰۱ | ۱ء۵۰۰۰۰۱ | ۱ء۵۰۰۰۰۰۱ |

اس سے ہم دیکھتے ہیں کہ جب لا مائل بہ ۱ ہو تو ف (لا) مائل بہ ۱ء۵ ہوتا ہے یعنے :

$$\underset{\text{لا} \to ۱}{\text{نہا}} \dfrac{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}} - ۲}{\text{لا} - ۱} = ۱ء۵$$

اسی انتہا کو ہم دوسری طرح سے حاصل کر سکتے ہیں - اگر لا کی قیمت سوائے ۱ کے کچھ ہی ہو تو ہم ف (لا) کو مختصر کر کے لکھتے ہیں :

$$\text{ف}(\text{لا}) = \frac{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}} - ۲}{\text{لا} - ۱} = \frac{(\sqrt{\text{لا}} - ۱)(\sqrt{\text{لا}} + ۲)}{(\sqrt{\text{لا}} - ۱)(\sqrt{\text{لا}} + ۱)} = \frac{\sqrt{\text{لا}} + ۲}{\sqrt{\text{لا}} + ۱}$$

اب اگر ہم لا کو مائل بہ ۱ کریں تو آسانی سے ملتا ہے کہ $\frac{\sqrt{\text{لا}} + ۲}{\sqrt{\text{لا}} + ۱}$ کی انتہا ۵ء۱ ہے۔

**مثال ۲- اگر ف (لا) = $\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}}$ تو $\underset{\text{لا} \to ۰}{\text{نہا}}$ ف (لا) معلوم کرو۔**

چونکہ $\frac{\text{جب}(-\text{لا})}{-\text{لا}} = \frac{-\text{جب لا}}{-\text{لا}} = \frac{\text{جب لا}}{\text{لا}}$ یعنے چونکہ ف(-لا) = ف (لا)

اس لیے کسی ایک طرف کی قیمتوں سے لا کو صفر کی طرف مائل کرنا کافی ہے۔
مثلثی نسبتوں کی جدول سے ہم کو حسب ذیل قیمتیں حاصل ہوتی ہیں:-

| لا = درجوں میں | ۱ | ۸ء | ۶ء | ۴ء | ۲ء | ۱ء |
|---|---|---|---|---|---|---|
| جب لا = | ۰۱۷۵ء | ۰۱۴۰ء | ۰۱۰۵ء | ۰۰۷۰ء | ۰۰۳۵ء | ۰۰۱۷ء |

اس جدول سے ہم دیکھتے ہیں کہ $\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}}$ کی نسبت بتدریج ۰۱۷ء کی طرف مائل ہو رہی ہے جبکہ لا چھوٹا ہوتا چلا جارہا ہے۔ اس لیے

$$\underset{\text{لا} \to ۰}{\text{نہا}} \frac{\text{جب لا}}{\text{لا}} = ۰۱۷ء$$

**نوٹ** - یہ یاد رکھنا چاہیے کہ یہاں زاویہ لا کو ہم نے درجوں میں ناپا ہے۔ آگے باب دوم میں ہم ثابت کرینگے کہ اگر زاویہ طہ کو نیم قطریوں میں ناپا جائے تو

$$\underset{\text{طہ} \to ۰}{\text{نہا}} \frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}} = ۱$$

اس سے ظاہر ہے کہ جس وقت لا کو درجوں میں ناپا جائے تو

$$\underset{\text{لا} \to ۰}{\text{نہا}} \frac{\text{جب لا}}{\text{لا}} = \frac{\pi}{۱۸۰} = ۰۱۷ء$$

ہونا چاہیے۔

**مثال ۳- اگر** ف (لا) = $\frac{\sqrt{\text{لا}^۲ + \text{لا} + ۱} - \sqrt{\text{لا}^۲ - \text{لا} + ۱}}{\text{لا}^۲}$ ہو تو

$\underset{\text{لا}\to 0}{\text{نہا}}$ ف (لا) معلوم کرو۔ تفاعل ف (لا) کی قیمت نقطۂ لا = ۰ پر غیر معین ہے۔ لیکن اگر سوائے صفر کے لا کی قیمت کچھ ہی ہو تو

$$\text{ف}(\text{لا}) = \frac{\left\{\sqrt{\text{ا}+\text{لا}+\text{لا}^2} - \sqrt{\text{ا}-\text{لا}+\text{لا}^2}\right\}}{\text{لا}^2}$$

$$= \frac{\left\{\sqrt{\text{ا}+\text{لا}+\text{لا}^2} - \sqrt{\text{ا}-\text{لا}+\text{لا}^2}\right\}\left\{\sqrt{\text{ا}+\text{لا}+\text{لا}^2} + \sqrt{\text{ا}-\text{لا}+\text{لا}^2}\right\}}{\text{لا}^2\left\{\sqrt{\text{ا}+\text{لا}+\text{لا}^2} + \sqrt{\text{ا}-\text{لا}+\text{لا}^2}\right\}}$$

$$= \frac{(\text{ا}+\text{لا}+\text{لا}^2) - (\text{ا}-\text{لا}+\text{لا}^2)}{\text{لا}^2\left\{\sqrt{\text{ا}+\text{لا}+\text{لا}^2} + \sqrt{\text{ا}-\text{لا}+\text{لا}^2}\right\}}$$

$$= \frac{2\,\text{لا}^2}{\text{لا}^2\left\{\sqrt{\text{ا}+\text{لا}+\text{لا}^2} + \sqrt{\text{ا}-\text{لا}+\text{لا}^2}\right\}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\text{ا}+\text{لا}+\text{لا}^2} + \sqrt{\text{ا}-\text{لا}+\text{لا}^2}}$$

اس میں نسب نما ← ۲ جبکہ لا ← ۰۔ اس لیے تفاعل کی انتہا $\frac{2}{2} = 1$ ہے

پس $\underset{\text{لا}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\sqrt{\text{ا}+\text{لا}+\text{لا}^2} - \sqrt{\text{ا}-\text{لا}+\text{لا}^2}}{\text{لا}^2} = 1$

## مشقی سوالات ۴

ذیل کی انتہائیں معلوم کرو:—

(ا) $\underset{\text{لا}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{ا} + 3\,\text{لا}}{2 - 4\,\text{لا}}$

(۲) $\underset{\text{لا} \to \infty}{\text{نہا}} \dfrac{1 + 3\text{لا}}{2 - 4\text{لا}}$

(۳) $\underset{\text{لا} \to 0}{\text{نہا}} \dfrac{\text{لا}^2 + 1}{3\text{لا}^2 + 7}$

(۴) $\underset{\text{لا} \to \infty}{\text{نہا}} \dfrac{\text{لا}^2 + 1}{3\text{لا}^2 + 7}$

(۵) $\underset{\text{لا} \to 0}{\text{نہا}} \dfrac{\text{لا} - 1}{\text{لا} + 1}$

(۶) $\underset{\text{لا} \to \infty}{\text{نہا}} \dfrac{\text{لا} - 1}{\text{لا} + 1}$

(۷) $\underset{\text{لا} \to 1}{\text{نہا}} \dfrac{\text{لا}^3 + \text{لا}^2 - \text{لا} - 1}{\text{لا}^2 - 3\text{لا} + 2}$

(۸) $\underset{\text{لا} \to -3}{\text{نہا}} \dfrac{\text{لا}^2 + 5}{\text{لا} + 5}$

(۹) $\underset{\text{لا} \to 1}{\text{نہا}} \dfrac{\text{لا}^3 - 1}{\text{لا} - 1}$

(۱۰) $\underset{\text{لا} \to \infty}{\text{نہا}} \dfrac{\text{لا}(\text{لا} + 1)}{(\text{لا} + 2)(\text{لا} + 3)}$

(۱۱) $\underset{\text{لا} \to 0}{\text{نہا}} \dfrac{\sqrt{1 + 2\text{لا}} - \sqrt{1 + \text{لا}}}{\text{لا}}$

(۱۲) $\underset{\text{لا} \to 0}{\text{نہا}} \dfrac{\sqrt{1 + 2\text{لا}^2} - \sqrt{1 + 4\text{لا}^2}}{\text{لا}^2}$

(۱۳) $\underset{\text{لا} \to 0}{\text{نہا}} \dfrac{\sqrt[3]{1 + \text{لا}} - \sqrt[3]{1 - \text{لا}}}{\text{لا}}$

(۱۴) $\underset{\text{لا} \to 0}{\text{نہا}} \dfrac{\text{لا} + 2 - 2\sqrt{\text{لا} + 1}}{\text{لا}^2}$

(۱۵) $\underset{\text{ھ} \to 0}{\text{نہا}} \dfrac{(\text{لا} + \text{ھ})^3 - \text{لا}^3}{\text{ھ}}$

(۱۶) $\underset{\text{لا} \to -1}{\text{نہا}} \dfrac{\text{لا}^2 + 4\text{لا} + 3}{\text{لا}^2 - 7\text{لا} - 8}$

(۱۷) $\underset{\text{لا} \to 2}{\text{نہا}} \dfrac{\text{لا}^2 - 4}{\sqrt{\text{لا} + 2} - \sqrt{3\text{لا} - 2}}$

(۱۸) $\underset{\text{لا}\to\text{ا}}{\text{نہا}} \frac{\text{لا}^۲ - \text{ا}^۲}{\text{لا} - \text{ا}}$

(۱۹) $\underset{\text{لا}\to\infty}{\text{نہا}} \frac{۲\text{لا}^۲ + ۳\text{لا} - ۱}{۳\text{لا}^۲ - ۲\text{لا} + ۱}$

(۲۰) $\underset{\text{لا}\to ۰}{\text{نہا}} \frac{۲\text{لا}^۲ + ۳\text{لا} - ۱}{۳\text{لا}^۲ - ۴\text{لا} + ۱}$

(۲۱) $\underset{\text{لا}\to ۰}{\text{نہا}} \frac{۴\text{لا}^۲ + ۳\text{لا} + ۲}{۵\text{لا}^۲ - ۲\text{لا} + ۳}$

(۲۲) $\underset{\text{لا}\to\infty}{\text{نہا}} \frac{۴\text{لا}^۲ + ۳\text{لا} + ۲}{۵\text{لا}^۲ - ۲\text{لا} + ۳}$

(۲۳) $\underset{\text{لا}\to ۰}{\text{نہا}} \frac{۲\text{لا} + ۱}{۲\text{لا}^۲ + ۱}$

(۲۴) $\underset{\text{لا}\to\infty}{\text{نہا}} \frac{۲\text{لا} + ۱}{۲\text{لا}^۲ + ۱}$

(۲۵) $\underset{\text{لا}\to ۰}{\text{نہا}} \frac{۳\text{لا} + ۴}{\text{لا}^۲ - ۵\text{لا} + ۳}$

(۲۶) $\underset{\text{لا}\to\infty}{\text{نہا}} \frac{۳\text{لا} + ۴}{\text{لا}^۲ - ۵\text{لا} + ۲}$

(۲۷) اگر $\text{ف}(\text{لا}) = \frac{\text{ا}\,\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ب}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{ج}\,\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \cdots + \text{ف}\,\text{لا} + \text{ق}}{\text{ا}_۱\,\text{لا}^{\text{م}} + \text{ب}_۱\,\text{لا}^{\text{م}-۱} + \text{ج}_۱\,\text{لا}^{\text{م}-۲} + \cdots + \text{ف}_۱\,\text{لا} + \text{ق}_۱}$

تو ثابت کرو کہ (۱) $\underset{\text{لا}\to ۰}{\text{نہا}}\ \text{ف}(\text{لا}) = \frac{\text{ق}}{\text{ق}_۱}$، (۲) $\underset{\text{لا}\to\infty}{\text{نہا}}\ \text{ف}(\text{لا}) = \frac{\text{ا}}{\text{ا}_۱}$ اگر $\text{ن} = \text{م}$

(۳) $\underset{\text{لا}\to\infty}{\text{نہا}}\ \text{ف}(\text{لا}) = ۰$ اگر $\text{م} > \text{ن}$

(۲۸) $\underset{\text{لا}\to\frac{\pi}{۴}}{\text{نہا}} \frac{۱ + \text{مس}\,\text{لا}}{۱ - \text{مس}\,\text{لا}}$

(۲۹) $\underset{\text{لا}\to ۰}{\text{نہا}} \frac{۱ - \text{جم}\,\text{لا}}{۱ + \text{جم}\,\text{لا}}$

(۳۰) $\underset{\text{لا}\to\infty}{\text{نہا}}\ ۲^{\text{لا}}$

(۳۱) $\underset{\text{لا}\to -\infty}{\text{نہا}}\ ۲^{\text{لا}}$

(۳۲) $\underset{\text{لا}\to ۰}{\text{نہا}} \frac{۳\text{لا} - ۴\text{لا}^۲}{۲\text{لا} + \text{لا}^۲}$

(۳۳) $$\underset{\text{لا}\to ۰}{\text{نہا}} \frac{\text{لا}^{۳} - \text{لا}^{۲}}{\text{لا}^{۲} - \text{لا}}$$

(۳۴) $$\underset{\text{لا}\to ۰}{\text{نہا}} \frac{\text{لا}^{۲} - \text{لا}}{\text{لا}^{۳} - \text{لا}^{۲}}$$

(۳۵) $$\underset{\text{لا}\to ۱}{\text{نہا}} \frac{\text{لا}^{۲} - ۳\text{لا} + ۲}{\text{لا}^{۲} - ۴\text{لا} + ۳}$$

(۳۶) $$\underset{\text{لا}\to ۲}{\text{نہا}} \frac{\text{لا}^{۳} - ۶\text{لا}^{۲} + ۱۱\text{لا} - ۶}{\text{لا}^{۳} - ۸}$$

(۳۷) $$\underset{\text{لا}\to -۲}{\text{نہا}} \frac{\text{لا}^{۳} + ۸}{\text{لا}^{۲} + ۳\text{لا} + ۲}$$

(۳۸) $$\underset{\text{لا}\to ۱}{\text{نہا}} \frac{\sqrt[۲]{\text{لا}} - ۱}{\sqrt[۳]{\text{لا}} - ۱}$$

(۳۹) $$\underset{\text{لا}\to ۲}{\text{نہا}} \frac{\text{لا}^{۳} - ۵\text{لا}^{۲} + ۸\text{لا} - ۴}{\text{لا}^{۳} - ۳\text{لا}^{۲} + ۴}$$

(۴۰) $$\underset{\text{لا}\to ۱}{\text{نہا}} \frac{\text{لا}^{۳} - \text{لا}^{۲} - \text{لا} + ۱}{\text{لا}^{۳} - ۳\text{لا} + ۲}$$

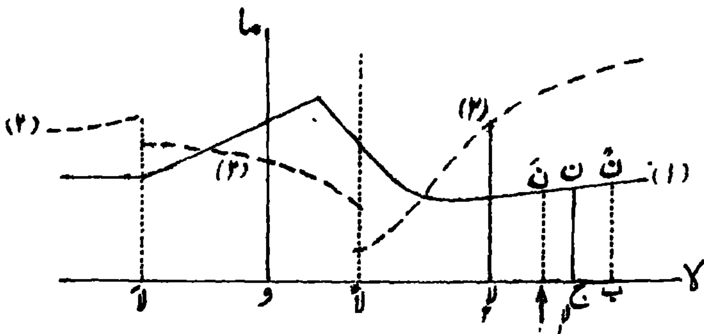
(۴۱) $$\underset{\text{لا}\to -۱}{\text{نہا}} \frac{\text{لا}^{۳} + ۳\text{لا}^{۲} + ۳\text{لا} + ۱}{۱ - \text{لا} - ۵\text{لا}^{۲} - ۳\text{لا}^{۳}}$$

# باب دوم

# مسلسل تفاعل

## ۱؍۲۔ مسلسل تفاعل کی تعریف۔

۱۱؍۲۔ طالب علم کو یقیناً اس کا کسی قدر تصور ہوگا کہ ایک مسلسل منحنی سے کیا مراد ہے۔ مثلاً ذیل کی شکل میں طالب علم یہ کہیگا کہ منحنی (۱) مسلسل اور منحنی (۲) غیر مسلسل ہے۔




اسی طرح دفعہ ۱؍۲۲ میں ہم نے جن سادہ تفاعلوں ما = م لا، ما = لا^۲، ما = لا^۳، ما = لا^ا، ما = جب لا، ما = جم لا کے منحنی

کھینچے ہیں یہ مسلسل ہیں لیکن ما = مس لا اور ما = تم لا کے منحنی غیر مسلسل ہیں۔

منحنی (۱) یا منحنی (۲) کسی کو ہم تفاعل ما = ف (لا) کی ترسیم تصور کر سکتے ہیں اور قدرتی طور پر ہمارا یہ خیال ہوتا ہے کہ ہم تفاعل ف (لا) کو مسلسل کہیں اگر اس کا ترسیمی منحنی مسلسل ہو اور تفاعل ف (لا) کو غیر مسلسل کہیں اگر اس کا ترسیمی منحنی غیر مسلسل ہو۔ یہ اگرچہ کوئی ضابطہ تعریف نہیں ہے لیکن سردست ہم اسی تعریف کو اختیار کرتے ہیں اور اس کے بعد ہم ضابطہ تعریف اخذ کرنے کی کوشش کرینگے۔

لا کی تمام قیمتوں کے لیے تسلسل کی تعریف کرنے سے پیشتر ضروری ہے کہ لا کی صرف ایک معین قیمت پر تسلسل کی تعریف کی جائے۔ اس لیے ہم لا کی ایک خاص قیمت لا۱ لیتے ہیں جس کے جواب میں منحنی (۱) پر نقطہ ن حاصل ہوتا ہے۔ اب ہم دریافت کرینگے کہ تفاعل ف (لا) کی وہ کونسی امتیازی خاصیتیں ہیں جو لا کی اس معین قیمت لا۱ کے ساتھ منسوب ہیں۔

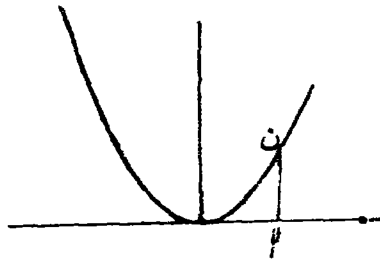
پہلے تو ہم دیکھتے ہیں کہ تفاعل ف (لا) کی تعریف نقطۂ لا = لا۱ پر کی گئی ہے یعنی نقطۂ لا۱ پر تفاعل کی قیمت ف (لا۱) معین اور معلوم ہے۔ ظاہر ہے کہ یہ خاصیت بہت ضروری ہے کیونکہ اگر تفاعل کی قیمت نقطۂ لا۱ پر معلوم نہ ہو تو منحنی میں سے ایک نقطہ غائب ہوگا۔

دوسری اہم خاصیت جو ہمیں نظر آتی ہے وہ یہ ہے کہ نقطۂ لا = لا۱ کے قریب تمام نقطوں کے لیے تفاعل ف (لا) کی قیمت معلوم ہو یعنی ہم ایک چھوٹا وقفہ ایسا معلوم کر سکتے ہیں کہ جس میں لا۱ شامل ہو اور جس پر کے تمام نقطوں کے لیے تفاعل ف (لا) کی قیمت معلوم اور معین ہو۔ شکل میں ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ہم نقطۂ لا = لا۱ (ج) کے دونوں طرف نقاط ا اور ب لیں تو خط کے حصۂ اب پر کے تمام نقطوں پر تفاعل کی قیمت معلوم ہے۔

تیسری یہ کہ اگر ہم نقطۂ ا کو نقطۂ ج کے قریب لائیں تو معین ا ن معین ج ن کے قریب آتا جائیگا یعنی تفاعل ف (لا) قیمت ف (لا۱) کے قریب آتا جائیگا۔ اسی طرح اگر سیدھی طرف سے ہم نقطۂ ب کو نقطۂ ج کے قریب لائیں تو معین ب نَ معین ج ن کے قریب آتا جائیگا یعنے اب بھی تفاعل

ف (لا) قیمت ف (لا) کے قریب آئیگا۔ یعنے اگر لا بائیں یا سیدھی کسی طرف سے مائل بہ لا ہو تو تفاعل ف (لا) مائل بہ ف (لا) ہو۔

مثلاً ایک خاص مثال کے طور پر ہم تفاعل ما = ف (لا) = لا² پر غور کرتے ہیں جس کا منحنی ہندسہ تحلیلی کی رُو سے ایک مکافی ملتا ہے۔



اس تفاعل لا² کے تسلسل کی خاصیت معلوم کرنے کے لیے ہم نقطۂ لا = ۱ پر غور کرتے ہیں یعنے لا کی قیمت ۱ لیتے ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ اس میں اوپر کی تینوں خاصیتیں پائی جاتی ہیں۔

(۱) ظاہر ہے کہ نقطۂ ۱ پر تفاعل کی قیمت معین اور معلوم ہے یعنے لا² = ۱

(۲) نقطۂ لا = ۹ر اور لا = ۱ر۱ کے درمیانی تمام نقطوں پر تفاعل کی قیمت معلوم ہے جس کو ہم حساب لگا کر معلوم کر سکتے ہیں۔ مثلاً لا = ۹ر پر قیمت ۸۱ر اور لا = ۱ر۱ پر قیمت ۲۱ر۱ ہے۔ اس خاص تفاعل کے لیے نہ صرف وقفۂ ۹ر سے لے کر ۱ر۱ تک بلکہ −∞ سے لے کر +∞ تک تمام نقطوں پر تفاعل کی قیمت معلوم ہو سکتی ہے۔

(۳) آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے کہ چاہے لا کو ۹ر سے بڑھاتے ہوئے بتدریج ۱ کی طرف مائل کیا جائے یا ۱ر۱ سے گھٹاتے ہوئے بتدریج ۱ کی طرف مائل کیا جائے دونوں صورتوں میں لا² کی انتہا ۱ ہے

یعنی نہا ـــ لا ← لاؔ = ا

اس تشریح کے بعد ظاہر ہے کہ ہم تسلسل کی حسب ذیل تعریف کر سکتے ہیں :۔

## ۱۲ء۲: مسلسل تفاعل کی تعریف:۔

تفاعل ف (لا) کو نقطۂ لاؔ پر مسلسل کہا جاتا ہے بشرطیکہ ف (لا) قیمت ف (لاؔ) کی طرف مائل ہو جبکہ لا سیدھی یا بائیں طرف سے مائل بہ لاؔ ہو۔ یعنی بشرطیکہ

نہا ـــ لا ← لاؔ ف (لا) = ف (لاؔ)

نوٹ :۔ انتہا کے بیان میں ہم نے طالب علم کی توجہ اس طرف مبذول کرائی تھی کہ عام صورت میں کسی نقطہ پر ایک تفاعل کی انتہا اور اس کی قیمت میں کوئی تعلق نہیں ہوتا۔ لیکن ہم نے وہاں دیکھا تھا کہ اتفاقی طور پر بعض تفاعلوں کی قیمت اور انتہا مساوی ہوتے ہیں۔ یہی خاص تفاعل ہیں جن کو ہم یہاں **مسلسل** کہتے ہیں۔ تو گویا مسلسل تفاعل کی تعریف یوں کی جارہی ہے کہ یہ وہ تفاعل ہے جس کی انتہا اور قیمت ایک ہی ہے۔

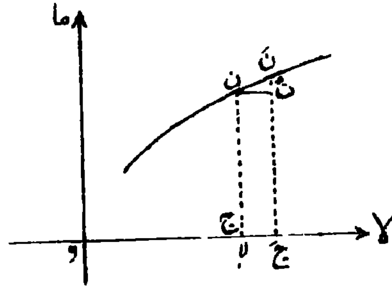
اس سے ہم دیکھتے ہیں کہ مسلسل تفاعل کا مفہوم انتہا کے مفہوم پر مبنی ہے۔ ایک عام تفاعل اور مسلسل تفاعل میں فرق صرف اس قدر ہے کہ عام تفاعل کے لیے نہا ـــ لا ← لاؔ ف (لا) کوئی عدد ل ہو سکتا ہے لیکن ایک مسلسل تفاعل کے لیے خاص طور پر ل کو ف (لاؔ) کے مساوی ہونا چاہیے۔ اگر ہم انتہا کی تعریف جو دفعہ ۵ء۲ میں کی گئی ہے اس کو زیر نظر رکھیں اور اس تعریف میں ل کی بجائے ف (لاؔ) درج کریں تو ایک مسلسل تفاعل کی تعریف اس طرح بھی کی جا سکتی ہے :۔

**مسلسل تفاعل کی دوسری تعریف** ۔ تفاعل ف (لا)

نقطۂ لا پر مسلسل اُس وقت ہوگا جبکہ اگر صہ کوئی دیا ہوا چھوٹا عدد ہو تو نقطہ لا کے کافی قریب (یعنے ایک فاصلہ ضہ پر) کے کسی نقطہ لا پر تفاعل کی قیمت ف (لا) اور ف (لا) کا فرق صہ سے چھوٹا ہو یعنے مختصر الفاظ میں ف (لا) نقطہ لا پر اُس وقت مسلسل ہوگا جبکہ جوں جوں نقطہ لا نقطہ لا کے قریب آتا جائے اُسی قدر قیمت ف (لا)، قیمت ف (لا) کے قریب ہوتی جائے۔ یعنے اگر لا میں تھوڑا فرق پیدا کیا جائے تو ف (لا) میں بھی بہت تھوڑا فرق پیدا ہوجائے۔

مسلسل تفاعل کی اس خاصیت کو ہم دوسرے الفاظ میں حسبِ ذیل طریقہ پر ادا کر سکتے ہیں:۔

فرض کرو کہ ما = ف (لا) ایک تفاعل ہے لا کا جس کی قیمت نقطۂ لا اور اس کے قریب کے نقطوں پر معلوم اور معین ہے۔




شکل میں نقطۂ ج محور لا پر عدد لا کو تعبیر کرتا ہے یعنے وج = لا اور اس لیے ج ن تفاعل کی قیمت کو یعنے ما = ف (لا) کو تعبیر کرتا ہے۔

لا کی قیمت میں ہم ایک خفیف اضافہ ھ کرتے ہیں یعنی لا کی قیمت کو لا سے بدل کر (لا + ھ) کر دیتے ہیں جہاں ھ ایک چھوٹا عدد ہے جس کو ہم مثبت یا منفی جس علامت کے ساتھ چاہیں لے سکتے ہیں (شکل میں ہم نے ھ کو مثبت علامت کے ساتھ لیا ہے)۔

پس وجَ = لا + ھ

اس لیے جَنَ = ف (لا + ھ) = ما + ک فرض کرو کیونکہ یہ

قیمت $ا_۱$ سے کچھ مختلف ہوگی۔ ن نَ محور ۷ کے متوازی کھینچو جو ج جَ کو نقطہ نَ پر ملے تو نَ نَ = ک ؛

ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ہم لا میں چھوٹی تبدیلی ھ کر دیں تو تفاعل کی قیمت $ا_۱$ میں اسی کے جواب میں ایک چھوٹی تبدیلی ک = ف (لا + ھ) - ف (لا) پیدا ہو جاتی ہے۔ اگر ہم تفاعل کی قیمت ج ن ہیں اس سے بھی کم تبدیلی کرنا چاہیں تو نقطہ جَ کو ج کے اور زیادہ قریب لے سکتے ہیں۔ غرض کہ جوں جوں نقطہ جَ نقطہ ج کے قریب آتا ہے اسی قدر قیمت جَ نَ قیمت ج ن کے قریب آتی ہے ؛

اسی بنا پر ہم کہتے ہیں کہ تفاعل ف (لا) نقطہ لا پر مسلسل ہے۔

## ۲ء۱۳ - ایک وقفہ میں مسلسل تفاعل :-

**متغیر لا کا وقفہ۔ تعریف :-** فرض کرو کہ ا اور ب دو حقیقی عدد ہیں اور ب > ا۔ اگر ایک مسلسل متغیر لا عددوں ا اور ب کی درمیانی ہر حقیقی قیمت کو بشمول ا اور ب اختیار کر سکے تو ہم کہتے ہیں کہ لا بند وقفہ (ا، ب) میں معلوم ہے یا بالفاظِ دیگر لا کا بند وقفہ (ا، ب) ہے۔

اگر اس وقفہ میں سے خود اعداد ا اور ب خارج ہوں تو اس وقفہ کو لا کا کھلا وقفہ کہتے ہیں۔

اس کتاب میں جب تک کہ صریحاً بیان نہ کیا جائے محض وقفہ سے ہماری مراد ہمیشہ بند وقفہ ہوگی۔

**ایک وقفہ میں مسلسل تفاعل۔ تعریف :-** اگر تفاعل ف (لا) وقفہ (ا، ب) میں کے ہر نقطہ پر مسلسل ہو تو ہم کہتے ہیں کہ تفاعل ف (لا) پورے وقفہ (ا، ب) میں مسلسل ہے۔

## ۲ء۲ : مسلسل تفاعل کی مثالیں :-

**۲۱ر۲ - مثال ۱ ــــ ما = لا$^{۲}$ :**

اگر لا کو بدل کر لا + ھ کر دیا جائے تو لا$^{۲}$ بدل کر (لا + ھ)$^{۲}$ یعنے لا$^{۲}$ + ۲ ھ لا + ھ$^{۲}$ ہو جاتا ہے اور اس لیے ما میں تبدیلی ۲ ھ لا + ھ$^{۲}$ ہوتی ہے۔

تفاعل لا$^{۲}$ کو مسلسل ثابت کرنے کے لیے ضروری ہے کہ تبدیلی ۲ ھ لا + ھ$^{۲}$ کو چھوٹا ثابت کیا جائے۔ اب اگر صہ کوئی دیا ہوا چھوٹا مثبت عدد ہو

۲ ھ لا + ھ$^{۲}$ < صہ

بشرطیکہ

لا$^{۲}$ + ۲ ھ لا + ھ$^{۲}$ < لا$^{۲}$ + صہ

یعنے اگر

(لا + ھ)$^{۲}$ < لا$^{۲}$ + صہ

یعنے اگر

لا + ھ < √(لا$^{۲}$ + صہ)

یعنے اگر

ھ < √(لا$^{۲}$ + صہ) - لا

پس معلوم ہوا کہ اگر لا میں تبدیلی ھ کو √(لا$^{۲}$ + صہ) - لا سے چھوٹا لیا جائے تو ما میں تبدیلی صہ سے چھوٹی ہوتی ہے چاہے لا کی کچھ ہی قیمت ہو۔ جس سے ظاہر ہے کہ − ∞ سے لے کر + ∞ تک لا کی تمام قیمتوں کے لیے تفاعل لا$^{۲}$ مسلسل ہے۔

اسی طرح ہم ثابت کرسکتے ہیں کہ ما = لا$^{ن}$، جہاں ن کوئی مثبت عدد ہے متغیر لا کی تمام قیمتوں کے لیے مسلسل ہے۔

**۲۲ر۲ - مثال ۲ ــــ ما = (لا − ۳) / لا**

اگر لا کی قیمت کو بدل کر لا + ھ کر دیا جائے تو ما کی قیمت

بدل کر $\frac{(\text{لا}+\text{ھ})-۳}{\text{لا}+\text{ھ}}$ ہو جاتی ہے اور اس لیے ما کی قیمت میں تبدیلی ک ہو تو

$$\text{ک} = \frac{(\text{لا}+\text{ھ})-۳}{\text{لا}+\text{ھ}} - \frac{\text{لا}-۳}{\text{لا}} = \frac{\text{لا}(\text{لا}+\text{ھ})-۳\,\text{لا}-(\text{لا}-۳)(\text{لا}+\text{ھ})}{\text{لا}(\text{لا}+\text{ھ})}$$

$$= \frac{۳\,\text{ھ}}{\text{لا}(\text{لا}+\text{ھ})}$$

یعنے ما کی قیمت میں تبدیلی $\frac{۳\,\text{ھ}}{\text{لا}(\text{لا}+\text{ھ})}$ ہوتی ہے۔ اب اگر کوئی چھوٹا مثبت عدد صہ دیا ہوا ہو تو ما کی قیمت میں یہ تبدیلی صہ سے کم ہوگی یعنے

$$\frac{۳\,\text{ھ}}{\text{لا}(\text{لا}+\text{ھ})} < \text{صہ}$$

اگر

$$۳\,\text{ھ} < \text{صہ}\,\text{لا}^{۲} + \text{صہ}\,\text{لا}\,\text{ھ}$$

یعنے اگر

$$\text{ھ}(۳-\text{لا}\,\text{صہ}) < \text{لا}^{۲}\,\text{صہ}$$

یعنے اگر

$$\text{ھ} < \frac{\text{لا}^{۲}\,\text{صہ}}{۳-\text{لا}\,\text{صہ}}$$

اب چاہے صہ کتنا ہی چھوٹا کیوں نہ ہو ھ کو ہم اس طرح منتخب کر سکتے ہیں کہ وہ $\frac{\text{لا}^{۲}\,\text{صہ}}{۳-\text{لا}\,\text{صہ}}$ سے چھوٹا ہو سوائے اس صورت کے جبکہ لا صفر کے مساوی ہو کیونکہ اس صورت میں ھ ایک مثبت عدد جو صفر سے چھوٹا ہو نہیں مل سکتا۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ دیا ہوا تفاعل $\frac{\text{لا}-۳}{\text{لا}}$ متغیر لا کی تمام قیمتوں کے لیے سوائے لا = ۰ کے مسلسل ہے اور نقطۂ لا = ۰ پر غیر مسلسل ہے۔ اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ اگر ایک تفاعل ف (لا) متغیر لا کی کسی خاص قیمت کے لیے لاتناہی ہو جائے تو اس قیمت کے لیے تفاعل ف (لا) غیر مسلسل ہے۔

اس لیے تفاعل ما = لا$^{\text{ن}}$ جہاں ن کوئی منفی عدد ہے نقطۂ لا = ۰ پر غیر مسلسل ہے اور اس نقطہ کے علاوہ لا کی تمام قیمتوں کے لیے مسلسل ہے۔

## ۲،۲۳: مثال ۳ :۔ ما = جب لا

اگر لا کی قیمت کو بدل کر لا + ھ کر دیا جائے تو جب لا بدل کر جب (لا + ھ) ہو جاتا ہے اور اس لیے ما میں تبدیلی جب (لا + ھ) ۔ جب (لا) ہو جاتی ہے۔ لیکن ہم کو معلوم ہے کہ اگر ا اور ب کوئی دو زاویے ہوں تو

$$\text{جب ا} - \text{جب ب} = ۲\,\text{جم}\,\frac{\text{ا}+\text{ب}}{۲}\,\text{جب}\,\frac{\text{ا}-\text{ب}}{۲}$$

پس

$$\text{ما میں تبدیلی} = ۲\,\text{جم}\,\frac{\text{لا}+\text{ھ}+\text{لا}}{۲}\,\text{جب}\,\frac{\text{لا}+\text{ھ}-\text{لا}}{۲}$$

$$= ۲\,\text{جم}\left(\text{لا}+\frac{\text{ھ}}{۲}\right)\text{جب}\,\frac{\text{ھ}}{۲}$$

اب اگر صہ کوئی چھوٹا مثبت عدد دیا ہوا ہو تو ما میں یہ تبدیلی صہ سے کم ہوگی بشرطیکہ

$$۲\,\text{جم}\left(\text{لا}+\frac{\text{ھ}}{۲}\right)\text{جب}\,\frac{\text{ھ}}{۲} < \text{صہ}$$

یعنے اگر

$$\text{جب}\,\frac{\text{ھ}}{۲} < \frac{\text{صہ}}{۲\,\text{جم}\left(\text{لا}+\frac{\text{ھ}}{۲}\right)}$$

یعنے اگر

$$\text{جب}\,\frac{\text{ھ}}{۲} < \frac{\text{صہ}}{۲\,\text{جم لا}}$$

یعنے اگر

$$\text{ھ} < ۲\,\text{جب}^{-۱}\left(\frac{\text{صہ}}{۲\,\text{جم لا}}\right)$$

پس ہم دیکھتے ہیں کہ اگر لا مساوی نہیں ہے $\frac{\pi}{۲}$ کے کسی طاق ضعف کے تو ہم ھ کا اس طرح انتخاب کر سکتے ہیں کہ ھ $< ۲\,\text{جب}^{-۱}\left(\frac{\text{صہ}}{۲\,\text{جم لا}}\right)$ اور ھ کی اس قیمت

کے لیے ما میں تبدیلی صہ سے کم ہوگی۔

اب اگر لا مساوی ہے $\frac{\pi}{2}$ تو $\frac{\pi}{2}$ کو بدل کر $\frac{\pi}{2}$ + ھ کرنے میں ما کی قیمت میں تبدیلی

$$\text{جب}\left(\frac{\pi}{2} + \text{ھ}\right) - \text{جب}\ \frac{\pi}{2} = \text{جم ھ} - 1$$

ہوگی اور یہ تبدیلی مطلق قیمت میں صہ سے کم ہوگی بشرطیکہ

$$1 - \text{جم ھ} < \text{صہ}$$

یعنے اگر

$$\text{جم ھ} > 1 - \text{صہ}$$

پس ھ کا اس طرح انتخاب کرنا چاہیے کہ جم ھ کم از کم (۱-صہ) کے برابر ہو۔ ھ کی اس قیمت کے لیے ا میں تبدیلی صہ سے کم ہوگی۔

غرض کہ $-\infty$ سے لے کر $+\infty$ تک لا کی تمام قیمتوں کے لیے عدد ھ کا ہم اس طرح انتخاب کرسکتے ہیں کہ جب لا کی قیمت میں تبدیلی جب (لا + ھ) - جب لا دیے ہوئے اختیاری چھوٹے مثبت عدد صہ سے کم ہو۔ پس تفاعل جب لا متغیر لا کی تمام قیمتوں کے لیے مسلسل ہے۔

## ۲،۲۴۔ مثال ۴ : ما = مس لا

اگر لا کی قیمت کو بدل کر (لا + ھ) کردیا جائے تو مس لا بدل کر مس (لا + ھ) ہوجاتا ہے اور اس لیے ما میں تبدیلی مس (لا + ھ) - مس لا ہوجاتی ہے۔

$$\text{پس ما میں تبدیلی} = \text{مس}(\text{لا} + \text{ھ}) - \text{مس لا}$$

$$= \frac{\text{مس لا} + \text{مس ھ}}{1 - \text{مس لا مس ھ}} - \text{مس لا}$$

$$= \frac{\text{مس لا} + \text{مس ھ} - \text{مس لا}\,(1 - \text{مس لا مس ھ})}{1 - \text{مس لا مس ھ}}$$

$$= \frac{\text{مس ھ}\,(1 + \text{مس}^2\,\text{لا})}{1 - \text{مس لا مس ھ}} = \frac{\text{مس ھ قط}^2\,\text{لا}}{1 - \text{مس لا مس ھ}}$$

$$= \frac{\text{مس ھ}}{\text{جم}^{2}\text{ لا (۱ - مس لا مس ھ)}}$$

$$= \frac{\text{مس ھ}}{\text{جم}^{2}\text{ لا - جب لا جم لا مس ھ}}$$

اب اگر صہ کوئی دیا ہوا اختیاری چھوٹا مثبت عدد ہو تو ما میں یہ تبدیلی صہ سے کم ہوگی بشرطیکہ

$$\frac{\text{مس ھ}}{\text{جم}^{2}\text{ لا - جب لا جم لا مس ھ}} < \text{صہ}$$

یعنے اگر $\text{مس ھ (۱ + صہ جب لا جم لا)} < \text{صہ جم}^{2}\text{ لا}$

یعنے اگر $\text{مس ھ} < \frac{\text{صہ جم}^{2}\text{ لا}}{\text{۱ + صہ جب لا جم لا}}$

ھ کو ہم اس قدر چھوٹا مثبت انتخاب کر سکتے ہیں کہ $\text{مس ھ} < \frac{\text{صہ جم}^{2}\text{ لا}}{\text{۱ + صہ جب لا جم لا}}$ سوائے اس صورت کے جبکہ لا قیمت $\frac{\pi}{۲}$ کا کوئی طاق ضعف ہو۔ کیونکہ اگر لا = $\frac{\pi}{۲}$ تو جم لا = ۰ اور ھ ایک مثبت عدد ایسا انتخاب نہیں کیا جا سکتا کہ مس ھ < ۰۔ پس معلوم ہوا کہ تفاعل مس لا متغیر لا کا ایک مسلسل تفاعل ہے۔ لا کی تمام قیمتوں کے لیے سوائے حسب ذیل قیمتوں کے :

$$\text{لا} = \pm\frac{\pi}{۲}،\ \pm\frac{۳\pi}{۲}،\ \pm\frac{۵\pi}{۲}،\ \pm\frac{۷\pi}{۲}،\ \ldots،\ \pm\frac{\text{ن}\pi}{۲}\ \text{(ن طاق عدد)}$$

اگر لا قیمت $\frac{\pi}{۲}$ سے صرف ذرا سا کم ہے تو مس لا کی قیمت ایک بہت بڑا مثبت عدد ہے اور اگر لا قیمت $\frac{\pi}{۲}$ سے صرف ذرا سا بڑا ہے تو مس لا کی قیمت ایک بہت بڑا منفی عدد ہے جو تفاعل مس لا کی ترسیم سے ظاہر ہے۔ پس لا کی قیمت میں $\frac{\pi}{۲}$ کی بائیں طرف سے سیدھی طرف ذرا سا فرق پیدا کرنے پر مس لا کی قیمت میں بہت بڑا فرق پیدا ہو جاتا ہے جو تسلسل کی تعریف کے خلاف ہے۔ اس لیے مس لا نقطۂ $\frac{\pi}{۲}$ اور اسی طرح $\pm\frac{\text{ن}\pi}{۲}$ (ن طاق عدد) کے لیے غیر مسلسل ہے۔ باقی تمام نقطوں کے لیے جیسا کہ اوپر ثابت کیا گیا مس لا مسلسل ہے۔

# مشقی سوالات ۵

(۱) تعریف کی رُو سے ثابت کرو کہ ذیل کے تفاعل لا کی تمام قیمتوں کے لیے مسلسل ہیں:—

(ا) ما = ۳ + ۴ لا، (ب) ما = ۲ + لا − $لا^{۲}$، (ج) ما = جم لا،

(د) ما = $\frac{۱}{۱ + لا^{۲}}$، (ہ) ما = $جب^{۲}$ لا،

(۲) ثابت کرو کہ تفاعل ما = مم لا، لا کی تمام قیمتوں کے لیے مسلسل ہے سوائے حسبِ ذیل قیمتوں کے:

لا = ۰، ± π، ± ۲π، ± ۳π، ...، ± ن π، ... (ن مثبت صحیح عدد)

(۳) ثابت کرو کہ تفاعل ما = قط لا، لا کی تمام قیمتوں کے لیے مسلسل ہے سوائے حسبِ ذیل قیمتوں کے:

لا = ± $\frac{π}{۲}$، ± $\frac{۳π}{۲}$، ± $\frac{۵π}{۲}$، ...، ± $\frac{نπ}{۲}$ (ن طاق عدد)

(۴) ثابت کرو کہ تفاعل ما = قم لا، لا کی تمام قیمتوں کے لیے مسلسل ہے سوائے حسبِ ذیل قیمتوں کے:

لا = ۰، ± π، ± ۲π، ± ۳π، ...، ± ن π (ن مثبت صحیح عدد)

(۵) بتاؤ کہ ذیل کے تفاعل کن نقطوں پر غیر مسلسل ہیں:—

(ا) ما = $\frac{لا^{۲}}{۲لا - ۳}$، (ب) ما = $\frac{لا}{(لا + ۱)^{۲}}$، (ج) ما = قم ۲ لا

(د) ما = $\frac{۱}{لا^{۴} - ۱۳لا^{۲} + ۳۶}$، (ہ) ما = $\frac{۱ + جب^{۲} لا}{جم لا}$ (و) ما = $\frac{۲ + جب لا}{۱ + جم لا}$

(۶) تفاعل ما = $\frac{لا^{۳} + ۲۷}{لا + ۳}$ کو نقطۂ لا = −۳ پر کونسی قیمت دینی چاہیئے کہ یہ تفاعل لا کی تمام قیمتوں کے لیے مسلسل ہو جائے۔

(۷) ثابت کرو کہ تفاعل ما = $\frac{لا - ل}{(لا^{½} - ل^{½})^{۲}}$ نقطۂ لا = ل پر

غیر مسلسل ہے۔

(۸) ثابت کرو کہ تفاعل لا۲ + ۲لا − ۳ نقطۂ لا = ۲ پر مسلسل ہے۔

(۹) ثابت کرو کہ تفاعل ۱/(لا − ۱) نقطۂ لا = ۱ پر غیر مسلسل ہے۔

(۱۰) ثابت کرو کہ تفاعل لا۲ + ۴لا − ۲ نقطۂ لا = ۱ پر مسلسل ہے۔

(۱۱) ثابت کرو کہ تفاعل (لا۲ + ۱)/(لا۲ − ۱) نقطۂ لا = ۲ پر مسلسل ہے لیکن نقطۂ لا = ۱ پر غیر مسلسل ہے۔

(۱۲) ثابت کرو کہ تفاعل ۱/(۲لا − ۳) نقطۂ لا = ۳/۲ پر غیر مسلسل ہے۔

(۱۳) ثابت کرو کہ تفاعل (لا۲ − ۴)/(لا − ۲) نقطۂ لا = ۲ کے سوا باقی تمام نقطوں پر مسلسل ہے۔

## ۲،۳۔ مسلسل تفاعلوں کے متعلق مسائل۔

**۲،۳۱ ـ مسئلہ ۱۔** اگر تفاعل ف (لا) اور فہ (لا) نقطۂ لا = ا پر مسلسل ہوں تو تفاعل ف (لا) + فہ (لا) بھی نقطۂ لا = ا پر مسلسل ہوگا۔

چونکہ تفاعل ف (لا) نقطہ لا = ا پر مسلسل ہے اس لیے تعریف کی رُو سے

نہا (لا ← ا) ف (لا) = ف (ا) ........ (۱)

اسی طرح چونکہ تفاعل فہ (لا) نقطۂ لا = ا پر مسلسل ہے اس لیے

نہا (لا ← ا) فہ (لا) = فہ (ا) ........... (۲)

اب ہمیں دفعہ ۵،۱ کے مسئلہ (۱) کی رُو سے معلوم ہے کہ دو تفاعلوں کے حاصل جمع کی انتہا انتہاؤں کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے پس (۱) اور (۲) سے

نہا (لا ← ا) { ف (لا) + فہ (لا) } = { ف (ا) + فہ (ا) } ...... (۳)

لیکن {ف (ا) + فہ (ا)} قیمت ہے تفاعل {ف (لا) + فہ (لا)} کی نقطۂ لا = ا پر یعنے اس تفاعل کی قیمت اور انتہا دونوں ایک ہی ہیں پس تعریف کی رُو سے تفاعل {ف (لا) + فہ (لا)} نقطۂ لا = ا پر مسلسل ہے ۔

۲/۳۲ ۔ مسئلہ ۲ ۔ اگر تفاعل ف (لا) اور فہ (لا) نقطۂ لا = ا پر مسلسل ہوں تو تفاعل ف (لا) ۔ فہ (لا) بھی نقطۂ لا = ا پر مسلسل ہوگا ۔

دفعہ گذشتہ کی طرح تعریف کی بنا پر ہم کو حاصل ہوتا ہے کہ

$$\underset{لا \to ا}{\text{نہا}}\ ف\ (لا) = ف\ (ا)\ ،\quad \underset{لا \to ا}{\text{نہا}}\ فہ\ (لا) = فہ\ (ا)$$

لیکن دفعہ ۲۵/۱ کے مسئلہ (۲) کی رُو سے

$$\underset{لا \to ا}{\text{نہا}} \{ف\ (لا) ۔ فہ\ (لا)\} = \{ف\ (ا) ۔ فہ\ (ا)\}$$

یعنے تفاعل ف (لا) ۔ فہ (لا) کی انتہا اور قیمت ایک ہی ہیں پس تفاعل ف (لا) ۔ فہ (لا) نقطۂ لا = ا پر مسلسل ہے ۔

۲/۳۳ ۔ مسئلہ ۳ : اگر تفاعل ف (لا) اور فہ (لا) نقطۂ لا = ا پر مسلسل ہوں تو تفاعل ف (لا) فہ (لا) بھی نقطۂ لا = ا پر مسلسل ہوگا ۔

ہمیں دیا ہوا ہے کہ

$$\underset{لا \to ا}{\text{نہا}}\ ف\ (لا) = ف\ (ا)\ ،\quad \underset{لا \to ا}{\text{نہا}}\ فہ\ (لا) = فہ\ (ا)$$

لیکن دفعہ ۲۵/۱ کے مسئلہ (۳) کی رُو سے دو تفاعلوں کے حاصل ضرب کی انتہا انتہاؤں کے حاصلِ ضرب کے مساوی ہوتی ہے، پس

$$\underset{لا \to ا}{\text{نہا}} \{ف\ (لا) \times فہ\ (لا)\} = ف\ (ا) \times فہ\ (ا)$$

یعنے تفاعل ف (لا) × فہ (لا) کی قیمت اور انتہا دونوں ایک ہی ہیں پس

تفاعل ف (لا) × فہ (لا) نقطۂ لا = لو پر مسلسل ہے۔

۲،۳۴- مسئلہ (۴)- اگر تفاعل ف (لا) اور فہ (لا) نقطۂ لا = لو پر مسلسل ہوں اور فہ (لو) ≠ ۰، تو نقطۂ لا = لو پر تفاعل ف (لا) / فہ (لا) بھی مسلسل ہوگا۔
تعریف کی رُو سے ہم کو معلوم ہے کہ

نہا (لا ← لو) ف (لا) = ف (لو)، نہا (لا ← لو) فہ (لا) = فہ (لو)

لیکن دفعہ ۲،۵،۱ کے مسئلہ (۴) کی رُو سے دو تفاعلوں کے خارج قسمت کی انتہا انتہاؤں کے خارج قسمت کے مساوی ہوتی ہے۔ بشرطیکہ نسب نما کی انتہا صفر نہ ہو، پس

نہا (لا ← لو) ف (لا) / فہ (لا) = ف (لو) / فہ (لو) چونکہ فہ (لو) ≠ ۰،

یعنی تفاعل ف (لا) / فہ (لا) کی قیمت اور انتہا دونوں ایک ہی ہیں اس لیے یہ تفاعل نقطۂ لا = لو پر مسلسل ہے۔

# مثالیں

ثابت کرو کہ ذیل کے تفاعل مسلسل ہیں:—

(۱) ما = لا۲

(۲) ما = لا۴

(۳) ما = لو لاⁿ + ل۱ لاⁿ⁻¹ + ل۲ لاⁿ⁻² + … + لن₋₁ لا + لن

(ن مثبت صحیح عدد اور لو، ل۱، ل۲ … لن مستقل ہیں)

(۴) ما = لا / (لا۲ + ۱)

(۵) ما = جب² لا

(۶) ما = $\frac{\text{جب لا}}{\text{۴ + جم لا}}$

(۷) ما = جبᵐ لا جمⁿ لا (م اور ن مثبت صحیح اعداد ہیں)

# ۴،۲ - چند اہم انتہائیں

## ۴،۲،۱ - نہا لاⁿ (ن ← ∞)

اس میں لا ایک معین عدد ہے جو -∞ سے +∞ تک کچھ ہی ہوسکتا ہے - لا کی ان قیمتوں کو ہم مختلف حصوں میں تقسیم کر سکتے ہیں اور ہم دیکھیں گے کہ لا کی مختلف قیمتوں کے لیے یہ انتہا مختلف حاصل ہوتی ہے -

(ا) لا > ۱؛ فرض کرو کہ لا ایک مثبت عدد ہے جو ۱ سے بڑا ہے تو ہم لکھ سکتے ہیں لا = ۱ + ی جہاں ی کوئی مثبت عدد ہے جو صفر سے بڑا ہے -

$$\text{پس}\quad \text{لا}^{\text{ن}} = (\text{۱} + \text{ی})^{\text{ن}} = \text{۱} + \text{ن ی} + \frac{\text{ن (ن-۱)}}{\lfloor\text{۲}} \text{ی}^{\text{۲}} + \cdots + \text{ی}^{\text{ن}}$$

اس لیے

لاⁿ > ۱ + ن ی (ن کی تمام قیمتوں کے لیے جو ۱ سے بڑی ہوں)

اب چونکہ ی ایک ثابت عدد ہے اور ن بڑا ہوتا جاتا ہے - اس لیے ہم ن کو کافی بڑا لے کر ن ی کو جتنا چاہیں بڑا بنا سکتے ہیں - پس

$$\text{نہا}_{\text{ن} \to \infty} \text{ ن ی} = \infty$$

$$\therefore \quad \text{نہا}_{\text{ن} \to \infty} \text{ لا}^{\text{ن}} = \infty$$

(ب) لا = ۱

لاⁿ = ۱ (ن کی تمام قیمتوں کے لیے) اور اس لیے

$$\text{نہا}_{\text{ن} \to \infty} \text{ لا}^{\text{ن}} = \text{۱}$$

(ج) $\text{۰} \leq \text{لا} < \text{۱}$ : یعنی اگر لا ایک مثبت کسر واجب ہے۔

رکھو $\text{لا} = \frac{\text{۱}}{\text{ما}}$ تو جبکہ لا صفر اور ۱ کے درمیان واقع ہوگا تو ما ۱ اور $+\infty$ کے درمیان واقع ہوگا۔ پس چونکہ

$\text{لا}^{\text{ن}} = \frac{\text{۱}}{\text{ما}^{\text{ن}}}$ اور ما ۱ سے بڑا مثبت عدد ہے اس لیے ن کو کافی بڑا لینے پر $\text{ما}^{\text{ن}}$ کو جس قدر چاہیں بڑا اور اس لیے $\frac{\text{۱}}{\text{ما}^{\text{ن}}}$ کو جتنا چاہیں چھوٹا کر سکتے ہیں۔

پس $\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}} \text{لا}^{\text{ن}} = \text{۰}$

(د) $\text{لا} = \text{۰}$ تو $\text{لا}^{\text{ن}} = \text{۰}^{\text{ن}} = \text{۰}$، ن کی تمام قیمتوں کے لیے اور اس لیے

$\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}} \text{لا}^{\text{ن}} = \text{۰}$

(ہ) $-\text{۱} < \text{لا} < \text{۰}$ یعنے لا ایک منفی کسرِ واجب ہے۔

رکھو $\text{لا} = -\text{ما}$ تو $\text{۰} < \text{ما} < \text{۱}$ یعنے ما ایک مثبت کسرِ واجب ہو جاتی ہے۔

پس $\text{لا}^{\text{ن}} = (-\text{۱})^{\text{ن}}\, \text{ما}^{\text{ن}}$

لیکن صورت (ج) کی رُو سے چونکہ ما ایک مثبت کسرِ واجب ہے اس لیے

$\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}} \text{ما}^{\text{ن}} = \text{۰}$

اس $\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}} \text{لا}^{\text{ن}} = \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}} (-\text{۱})^{\text{ن}} \cdot \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}} \text{ما}^{\text{ن}} = \text{۰}$

(و) $\text{لا} = -\text{۱}$

پس $\text{لا}^{\text{ن}} = (-\text{۱})^{\text{ن}}$ یعنے تواتر کی رقمیں یکے بعد دیگرے $+\text{۱}$ اور $-\text{۱}$ کے مساوی رہیں اس لیے تواتر کسی انتہا کی طرف مائل نہیں ہوتا بلکہ اہتزاز کرتا ہے اور نیز چونکہ تواتر کے کسی رکن کی قیمت

مطلق +۱ سے بڑی نہیں ہوتی اس لیے کہا جاتا ہے کہ یہ تواتر محدود اہتزاز کرتا ہے۔

(ز) لا < -۱ یعنے لا کی قیمت -۱ سے کم ہے۔

اگر ہم لا = - ما رکھیں تو ظاہر ہے کہ ما > ۱

پس $\text{لا}^{\text{ن}} = (-۱)^{\text{ن}}\ \text{ما}^{\text{ن}}$

اب صورت (ا) کے بموجب چونکہ ما > ۱، اس لیے

$$\underset{\text{ن} \to \infty}{\text{نہا}}\ \text{ما}^{\text{ن}} = +\infty$$

اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ تواتر $\text{لا}^{\text{ن}}$ کے طاق ارکان $-\infty$ کے اور جفت ارکان $+\infty$ کی طرف مائل ہوتے ہیں اس لیے تواتر $\text{لا}^{\text{ن}}$ کی انتہا نہ تو کوئی محدود عدد ہے اور نہ $+\infty$ نہ $-\infty$۔ اس کے علاوہ مطلق قیمت میں تواتر کی رقمیں بڑھتی چلی جاتی ہیں اس لیے کہا جاتا ہے کہ اگر لا < -۱ تواتر $\text{لا}^{\text{ن}}$ غیر محدود اہتزاز کرتا ہے۔

۲، ۴۲ - $\underset{\text{لا} \to \text{ر}}{\text{نہا}} \dfrac{\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ر}^{\text{ن}}}{\text{لا} - \text{ر}} = \text{ن}\ \text{ر}^{\text{ن}-۱}$ جہاں ن کوئی منطق عدد ہے اس کے ثبوت کو ہم ن کی قیمت کے لحاظ سے ۳ حصوں میں تقسیم کرتے ہیں بموجب اس کے کہ ن مثبت صحیح عدد ہے یا مثبت کسر ہے یا کوئی منفی عدد ہے۔

(۱) فرض کرو کہ ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔ تب ہم تصدیق کر سکتے ہیں کہ

$$(\text{لا} - \text{ر})(\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{لا}^{\text{ن}-۲}\,\text{ر} + \text{لا}^{\text{ن}-۳}\,\text{ر}^{۲} + \cdots + \text{لا}\,\text{ر}^{\text{ن}-۲} + \text{ر}^{\text{ن}-۱}) = \text{لا}^{\text{ن}} - \text{ر}^{\text{ن}}$$

یعنے $\dfrac{\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ر}^{\text{ن}}}{\text{لا} - \text{ر}} = \text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{لا}^{\text{ن}-۲}\,\text{ر} + \cdots + \text{لا}\,\text{ر}^{\text{ن}-۲} + \text{ر}^{\text{ن}-۱}$ ...... (۱)

چاہے لا اور ر کوئی حقیقی عدد ہوں اور ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو جملہ (۱) ہمیشہ صحیح ہے بشرطیکہ لا ≠ ر۔ لیکن چونکہ انتہا لینے میں بھی ہم لا کو کبھی ر کے بالکل برابر نہیں کرتے اگرچہ کہ جس قدر چاہیں قریب لاتے ہیں اس لیے

$$\underset{\text{لا}\to\text{و}}{\text{نہا}} \frac{\text{لا}^{\text{ن}} - \text{و}^{\text{ن}}}{\text{لا} - \text{و}} = \underset{\text{لا}\to\text{و}}{\text{نہا}} \left\{ \text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{لا}^{\text{ن}-۲}\,\text{و} + \cdots + \text{لا}\,\text{و}^{\text{ن}-۲} + \text{و}^{\text{ن}-۱} \right\}$$

$$= \text{و}^{\text{ن}-۱} + \text{و}^{\text{ن}-۱} + \cdots + \text{و}^{\text{ن}-۱} \quad (\text{ن ارقام})$$

$$= \text{ن}\,\text{و}^{\text{ن}-۱}$$

(۲) فرض کرو کہ ن مثبت کسر $\frac{\text{ف}}{\text{ق}}$ ہے جہاں ف اور ق مثبت صحیح عدد ہیں - ہم چاہتے ہیں کہ $\underset{\text{لا}\to\text{و}}{\text{نہا}} \frac{\text{لا}^{\frac{\text{ف}}{\text{ق}}} - \text{و}^{\frac{\text{ف}}{\text{ق}}}}{\text{لا} - \text{و}}$ معلوم کریں - اس کے لیے ہم رکھتے ہیں

$$\text{لا} = \text{ما}^{\text{ق}} \quad \text{اور} \quad \text{و} = \text{ب}^{\text{ق}}$$

$$\therefore \text{لا}^{\frac{۱}{\text{ق}}} = \text{ما} \quad \text{اور} \quad \text{و}^{\frac{۱}{\text{ق}}} = \text{ب}؛ \quad \text{لا}^{\frac{\text{ف}}{\text{ق}}} = \text{ما}^{\text{ف}}؛ \quad \text{و}^{\frac{\text{ف}}{\text{ق}}} = \text{ب}^{\text{ف}}$$

نیز $\underset{\text{لا}\to\text{و}}{\text{نہا}}\ \text{لا}^{\frac{۱}{\text{ق}}} = \text{و}^{\frac{۱}{\text{ق}}} = \text{ب}$

یعنی جبکہ $\text{لا} \to \text{و}$ تو $\text{ما} \to \text{ب}$

پس چونکہ

$$\frac{\text{لا}^{\frac{\text{ف}}{\text{ق}}} - \text{و}^{\frac{\text{ف}}{\text{ق}}}}{\text{لا} - \text{و}} = \frac{\text{ما}^{\text{ف}} - \text{ب}^{\text{ف}}}{\text{ما}^{\text{ق}} - \text{ب}^{\text{ق}}}$$

یعنی

$$\frac{\text{لا}^{\frac{\text{ف}}{\text{ق}}} - \text{و}^{\frac{\text{ف}}{\text{ق}}}}{\text{لا} - \text{و}} = \frac{\text{ما}^{\text{ف}} - \text{ب}^{\text{ف}}}{\text{ما} - \text{ب}} \div \frac{\text{ما}^{\text{ق}} - \text{ب}^{\text{ق}}}{\text{ما} - \text{ب}}$$

پس

$$\underset{\text{لا}\to\text{و}}{\text{نہا}} \frac{\text{لا}^{\frac{\text{ف}}{\text{ق}}} - \text{و}^{\frac{\text{ف}}{\text{ق}}}}{\text{لا} - \text{و}} = \left\{ \underset{\text{ما}\to\text{ب}}{\text{نہا}} \frac{\text{ما}^{\text{ف}} - \text{ب}^{\text{ف}}}{\text{ما} - \text{ب}} \right\} \div \left\{ \underset{\text{ما}\to\text{ب}}{\text{نہا}} \frac{\text{ما}^{\text{ق}} - \text{ب}^{\text{ق}}}{\text{ما} - \text{ب}} \right\}$$

$$= (\text{ف}\ \text{ب}^{\text{ف}-۱}) \div (\text{ق}\ \text{ب}^{\text{ق}-۱}) \quad [\text{کیونکہ ف اور ق صحیح عدد ہیں}]$$

$$= \frac{\text{ف}}{\text{ق}}\ \text{ب}^{\text{ف}-\text{ق}} = \frac{\text{ف}}{\text{ق}}\ \text{ب}^{\text{ق}\left(\frac{\text{ف}}{\text{ق}}-۱\right)}$$

$$= \frac{ف}{ق} \left(ب^{ق}\right)^{\frac{ف}{ق}-1}$$

$$= \frac{ف}{ق}\, ا^{\frac{ف}{ق}-1} \quad [\text{کیونکہ } ب^{ق} = ا]$$

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر ن مثبت کسر ہو تب بھی

$$\underset{لا \to ا}{نہا} \frac{لا^{ن} - ا^{ن}}{لا - ا} = ن\, ا^{ن-1}$$

(۳) بالآخر اگر ن ایک منفی عدد ہے جو چاہے صحیح ہو یا کسر تو ہم لکھتے ہیں ن = -م جہاں م ایک مثبت صحیح یا کسری عدد ہوگا۔

اب $\frac{لا^{ن} - ا^{ن}}{لا - ا} = \frac{لا^{-م} - ا^{-م}}{لا - ا} = \frac{\frac{1}{لا^{م}} - \frac{1}{ا^{م}}}{لا - ا}$

$$= -\frac{لا^{م} - ا^{م}}{لا^{م} ا^{م} (لا - ا)}$$

پس $\underset{لا \to ا}{نہا} \frac{لا^{ن} - ا^{ن}}{لا - ا} = \left(\underset{لا \to ا}{نہا} \left(-\frac{1}{لا^{م} ا^{م}}\right)\right)\left(\underset{لا \to ا}{نہا} \frac{لا^{م} - ا^{م}}{لا - ا}\right)$

$$= -\frac{1}{ا^{2م}} \cdot م\, ا^{م-1} \quad [\text{کیونکہ م مثبت عدد ہے}]$$

$$= -م \cdot ا^{-م-1}$$

$$= ن\, ا^{ن-1} \quad [\text{کیونکہ } -م = ن]$$

پس ن کی تمام مثبت یا منفی صحیح اور کسری قیمتوں کے لیے مسئلہ صحیح ہے۔

نتیجۂ صریح۔ مذکورۂ بالا مسئلہ میں لا اور ا کوئی دو حقیقی عدد ہیں صرف شرط یہ ہے کہ لا مائل بہ ا ہوتا ہے۔ اس میں ہم لا کی بجائے لا + ھ اور ا کی بجائے لا رکھتے ہیں۔ اور اس لیے لا مائل بہ ا کی بجائے (لا + ھ) مائل بہ لا ہوتا ہے۔ اب ظاہر ہے کہ جس وقت لا + ھ مائل بہ لا ہو تو ھ کی قیمت چھوٹی

ہو جاتی ہے یعنے ھ مائل بہ صفر ہوتا ہے پس اوپر کا مسئلہ حسب ذیل ہو جاتا ہے:۔

$$\underset{\text{ھ}\to 0}{\text{نہا}}\ \frac{(\text{لا}+\text{ھ})^{\text{ن}}-\text{لا}^{\text{ن}}}{\text{لا}+\text{ھ}-\text{لا}}=\text{ن لا}^{\text{ن}-1}$$

یعنے

$$\underset{\text{ھ}\to 0}{\text{نہا}}\ \frac{(\text{لا}+\text{ھ})^{\text{ن}}-\text{لا}^{\text{ن}}}{\text{ھ}}=\text{ن لا}^{\text{ن}-1}$$

اس میں لا کوئی حقیقی عدد ہے اور ن کوئی مثبت یا منفی صحیح یا کسری عدد ہے۔ یہ نتیجہ بہت اہم ہے اور طالب علم کو چاہیے کہ اسے اچھی طرح سمجھے اور ذہن نشین کر لے۔

**۳۴،۲ -** $\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\ \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\lfloor\underline{\text{ن}}}=0$ جہاں لا کوئی ثابت حقیقی عدد ہے۔

اس کو ہم اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں:

$$\frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\lfloor\underline{\text{ن}}}=\frac{\text{لا}}{1}\times\frac{\text{لا}}{2}\times\frac{\text{لا}}{3}\times\cdots\times\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\ \cdots\cdots(1)$$

اب لا چاہے کتنا ہی بڑا عدد ہو پھر بھی وہ محدود ہے اور ن چونکہ غیر محدود بڑھتا چلا جاتا ہے اس لیے ہم ایک نَ ایسا معلوم کر سکتے ہیں کہ $\text{نَ} > 2\,\text{لا}$ یعنی $\frac{\text{لا}}{\text{نَ}}<\frac{1}{2}$

اب فرض کرو کہ $\text{ن}=\text{نَ}+\text{م}-1$، تب

$$\frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\lfloor\underline{\text{ن}}}=\left\{\frac{\text{لا}}{1}\times\frac{\text{لا}}{2}\times\cdots\times\frac{\text{لا}}{\text{نَ}-1}\right\}\times\left\{\frac{\text{لا}}{\text{نَ}}\times\frac{\text{لا}}{\text{نَ}+1}\times\cdots\times\frac{\text{لا}}{\text{نَ}+\text{م}-1}\right\}\ \text{——}(2)$$

اس میں نَ ایک محدود عدد ہے اس لیے $\left(\frac{\text{لا}}{1}\times\frac{\text{لا}}{2}\times\cdots\times\frac{\text{لا}}{\text{نَ}-1}\right)$ بھی ایک محدود ہے جو فرض کرو کہ ک کے مساوی ہے۔ نیز چونکہ

$\frac{\text{لا}}{\text{نَ}}<\frac{1}{2}$ اس لیے بدرجۂ اولیٰ $\frac{\text{لا}}{\text{نَ}+1}$، $\frac{\text{لا}}{\text{نَ}+1}$، ...، $\frac{\text{لا}}{\text{نَ}+\text{م}-1}$

سب کے سب کم ہونگے $\frac{1}{2}$ سے۔ نیز چونکہ (۲) میں بائیں قوسین میں م اجزا ہیں پس

$$\frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\lfloor\text{ن}} < 1 \cdot \frac{1}{\text{م}^{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

اب جس وقت ن بڑھتا چلا جائیگا تو ظاہر ہے کہ م بھی بڑھتا چلا جائیگا اور ہم کو معلوم ہے کہ م کو کافی بڑا لینے سے $\frac{1}{\text{م}^2}$ کو ہم جتنا چاہیں چھوٹا کر سکتے ہیں اس لیے ن کو کافی بڑا لینے سے $\frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\lfloor\text{ن}}$ کو بھی ہم جتنا چاہیں چھوٹا کر سکتے ہیں پس

$$\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}} \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\lfloor\text{ن}} = 0$$

## ۲،۴۴ - $\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}} \left(1+\frac{1}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}$

ن چونکہ ایک مثبت صحیح عدد ہے اس لیے مسئلۂ ثنائی کی مدد سے پھیلانے پر حاصل ہوتا ہے:

$$\left(1+\frac{1}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = 1 + \text{ن}\cdot\frac{1}{\text{ن}} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{2\times 1}\times\frac{1}{\text{ن}^2} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)}{3\times 2\times 1}\times\frac{1}{\text{ن}^3} + \cdots \ (\text{ن}+1 \text{ رقمیں})$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{\lfloor 2}\left(1-\frac{1}{\text{ن}}\right) + \frac{1}{\lfloor 3}\left(1-\frac{1}{\text{ن}}\right)\left(1-\frac{2}{\text{ن}}\right) + \cdots \ (\text{ن}+1 \text{ رقمیں}) \quad (1)$$

اب جوں جوں ن بڑھتا جاتا ہے اس سلسلہ کی رقمیں بڑی ہوتی جاتی ہیں کیونکہ $\left(1-\frac{1}{\text{ن}}\right)$ وغیرہ بڑی ہوتی جاتی ہیں۔ اس کے علاوہ رقموں کی تعداد بھی بڑھتی جاتی ہے اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ن کے بڑھنے کے ساتھ ساتھ تواتر $\left(1+\frac{1}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}$ بھی بڑھتا جاتا ہے یعنے یہ ایک صعودی تواتر ہے۔ اس کے علاوہ ہم فوراً دیکھ سکتے ہیں کہ اس کی قیمت ۲ سے بڑی ہے جبکہ ن کافی بڑا لیا جائے۔ نیز اگر $\left(1+\frac{1}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}$ کے سلسلہ (۱) کا ذیل کے سلسلہ (۲) سے رقم بہ رقم مقابلہ کیا جائے تو معلوم ہوتا ہے کہ تواتر ن کی ہر قیمت کے لیے (۲) کے بائیں سلسلہ سے کم ہے یعنے

$$\left(1+\frac{1}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} < 1 + 1 + \frac{1}{2\times 1} + \frac{1}{3\times 2\times 1} + \cdots + \frac{1}{\lfloor\text{ن}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

لیکن پہلی ۳ رقموں کے بعد خود (۲) کے بائیں سلسلہ کی ہر رقم ذیل کے سلسلہ (۳) سے کم ہے

$$۱ + ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲ \times ۲} + \frac{۱}{۲^۳} + \cdots + \frac{۱}{۲^{ن-۱}} \quad \ldots\ldots (۳)$$

پس

$$\left(۱ + \frac{۱}{ن}\right)^{ن} < ۱ + \left\{۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲^۲} + \cdots \frac{۱}{۲^{ن-۱}}\right\}$$

$$< ۱ + \frac{\left(\frac{۱}{۲}\right)^{ن} - ۱}{\frac{۱}{۲} - ۱}$$

$$< ۳ - \frac{۱}{۲^{ن-۱}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴)$$

یعنے بدرجۂ اولیٰ ن کی تمام قیمتوں کے لیے

$$\left(۱ + \frac{۱}{ن}\right)^{ن} < ۳ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵)$$

پس ہم دیکھتے ہیں کہ $\left(۱ + \frac{۱}{ن}\right)^{ن}$ جو ایک صعودی تواتر ہے ہمیشہ ۳ سے کم رہتا ہے اور اس لیے ہم یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ $\left(۱ + \frac{۱}{ن}\right)^{ن}$ کی انتہا موجود ہے جو ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہوتی ہے ۔ اس انتہا کا کسی قدر تصور حاصل کرنے کے لیے ن کی چند بڑھتی ہوئی قیمتوں کے لیے ہم تواتر کی قیمت دریافت کرینگے ۔

اگر ن = ۱۰ تو $\left(۱ + \frac{۱}{ن}\right)^{ن} = (۱٫۱)^{۱۰} = ۲٫۵۹۳۷$

اگر ن = ۱۰۰ تو $\left(۱ + \frac{۱}{ن}\right)^{ن} = (۱٫۰۱)^{۱۰۰} = ۲٫۷۰۴۸$

اگر ن = ۱۰۰۰ تو $\left(۱ + \frac{۱}{ن}\right)^{ن} = (۱٫۰۰۱)^{۱۰۰۰} = ۲٫۷۱۶۹$

اگر ن = ۱۰۰۰۰ تو $\left(۱ + \frac{۱}{ن}\right)^{ن} = (۱٫۰۰۰۱)^{۱۰۰۰۰} = ۲٫۷۱۸۱$

اگر ن = ۱۰۰۰۰۰ تو $\left(۱ + \frac{۱}{ن}\right)^{ن} = (۱٫۰۰۰۰۱)^{۱۰۰۰۰۰} = ۲٫۷۱۸۲$ وغیرہ

جس سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر ن غیر محدود بڑھتا چلا جائے تو $\left(۱ + \frac{۱}{ن}\right)^{ن}$ ایک انتہا کی طرف مائل ہوتا ہے جس کی قیمت ۲٫۷۱۸ سے کسی قدر زیادہ ہے ۔

یہ انتہا ایک معین لیکن ماورائی عدد یعنے عدد $\pi$ کی قسم کا ایک عدد ہے جس کی قیمت اگر ہم اعشاریہ میں معلوم کرنا چاہیں تو یہ عمل کبھی ختم نہیں ہوتا اس کی قیمت ۲٫۷۱۸۲۸۱۸۲۸۵ ہے اور اس کو اعشاریہ کے تقریباً چھ سو درجوں تک معلوم کیا گیا ہے - اعلیٰ ریاضی میں یہ عدد اہم ترین عددوں میں سے ہے اور اس کو بالعموم حرف (و) سے تعبیر کرتے ہیں جو لفظ قوت سے اخذ کیا گیا ہے پس

$$\lim_{\text{ن}\to\infty}\left(1+\frac{1}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = \text{و} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۶)$$

جہاں و کی قیمت اعشاریہ کے ۷ درجوں تک حسب ذیل ہے :

$$\text{و} = 2{,}7182818 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۷)$$

عدد و کی تقریبی قیمت تو ہم نے اس طرح معلوم کی لیکن اس کے لیے ایک لامتناہی سلسلہ بھی جملہ (۱) کی مدد سے دریافت کیا جا سکتا ہے - ہم نے دیکھا ہے کہ کسی مثبت صحیح عدد ن کے لیے

$$\left(1+\frac{1}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = 1+1+\frac{1}{\underline{|2}}\left(1-\frac{1}{\text{ن}}\right)+\frac{1}{\underline{|3}}\left(1-\frac{1}{\text{ن}}\right)\left(1-\frac{2}{\text{ن}}\right)+\ldots$$

$$+\frac{1}{\underline{|\text{ر}}}\left(1-\frac{1}{\text{ن}}\right)\left(1-\frac{2}{\text{ن}}\right)\ldots\left(1-\frac{\text{ر}-1}{\text{ن}}\right)+\ldots(\text{ن}+1 \text{ رقمیں})$$

اب جوں جوں ن بڑھتا جاتا ہے اس میں کا ہر ایک جزوِ ضربی

$1-\frac{1}{\text{ن}}$ ، $1-\frac{2}{\text{ن}}$ ، ... مائل بہ ۱ ہوتا ہے کیونکہ $\frac{1}{\text{ن}}$ ، $\frac{2}{\text{ن}}$ ، ... ، $\frac{\text{ر}}{\text{ن}}$ ، وغیرہ کی انتہا صفر ہوتی ہے ۔ لیکن اسی کے ساتھ ہم یہ بھی دیکھتے ہیں کہ ن ویں رقم میں ایسے اجزائے ضربی کی تعداد بھی ن کے ساتھ بڑھتی جاتی ہے - اس لیے محض اس بناء پر کہ اس میں سے ہر ایک جزوِ ضربی کی انتہا ۱ ہے ہم بغیر مزید ثبوت کے یہ نہیں کہہ سکتے کہ ان لامتناہی اجزاء کے حاصل ضرب کی انتہا بھی ایسا کوئی محدود عدد ہوگی - اس خاص صورت میں اس کا باضابطہ ثبوت دیا جا سکتا ہے کہ

$$\lim_{\text{ن}\to\infty}\left(1+\frac{1}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = 1+1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\ldots+\frac{1}{\underline{|\text{ر}}}+\ldots\infty \text{ ارقام} \ldots (۸)$$

یہ ثبوت چونکہ کسی قدر دِقّت طلب ہے اس لیے ہم اس کو یہاں بیان نہیں کرینگے ۔ طالب علم کو اس منزل پر بطور مفروض کے یہ مان لینا چاہیے کہ $\left(1+\frac{1}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}$ کی انتہا کے لیے ہم کو (۸) کے بائیں طرف کا سلسلہ حاصل ہوتا ہے جو مستدق ہے اور جس کی قیمت وہی عدد و ہے جو جملہ (۷) میں دیا گیا ہے ۔ پس

$$\text{نہا}_{\text{ن}\to\infty}\left(1+\frac{1}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{\text{ر}!}+\cdots\infty \text{ ارقام}$$

$$= \text{و}$$

$$= 2.7182818\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

## ۲٫۴۵ - $\text{نہا}_{\text{ن}\to\infty}\left(1+\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}$ - قوت نمائی تفاعل ۔

اس سلسلہ میں بھی ن ایک مثبت صحیح عدد ہے اور لا کوئی حقیقی ثابت عدد ہے اس لیے مسئلہ ثنائی کی مدد سے پھیلانے پر ملتا ہے :

$$\left(1+\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = 1+\text{ن}\times\frac{\text{لا}}{\text{ن}}+\frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{2!}\left(\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)^2+\frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)}{3!}\left(\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)^3+\cdots$$

$$+\frac{\text{ن}(\text{ن}-1)\cdots(\text{ن}-\text{ر}+1)}{\text{ر}!}\left(\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)^{\text{ر}}+\cdots(\text{ن}+1)\text{ ارقام}$$

$$= 1+\text{لا}+\frac{\text{لا}^2}{2!}\left(1-\frac{1}{\text{ن}}\right)+\frac{\text{لا}^3}{3!}\left(1-\frac{1}{\text{ن}}\right)\left(1-\frac{2}{\text{ن}}\right)+\cdots$$

$$+\frac{\text{لا}^{\text{ر}}}{\text{ر}!}\left(1-\frac{1}{\text{ن}}\right)\left(1-\frac{2}{\text{ن}}\right)\cdots\left(1-\frac{\text{ر}-1}{\text{ن}}\right)+\cdots(\text{ن}+1)\text{ رقمیں}\ldots(1)$$

اوپر کی طرح بغیر باضابطہ ثبوت دینے کے ہم یہ مان لیتے ہیں کہ ن کی بڑی قیمتوں کے لیے بائیں طرف کے جملہ کی انتہا ذیل کا لامتناہی سلسلہ ہے :

$$\text{نہا}_{\text{ن}\to\infty}\left(1+\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = 1+\text{لا}+\frac{\text{لا}^2}{2!}+\frac{\text{لا}^3}{3!}+\cdots+\frac{\text{لا}^{\text{ر}}}{\text{ر}!}+\cdots\infty\text{ ارقام}\ \ldots\ldots\ (2)$$

یہ بھی ثابت کیا جا سکتا ہے کہ یہ سلسلہ (۲) لا کی تمام قیمتوں کے لیے مستدق ہے

لیکن یہ دونوں ثبوت کہ جملۂ $(1+\frac{لا}{ن})^{ن}$ کی انتہا (۲) کا سلسلہ ہے اور یہ کہ یہ سلسلہ لا کی تمام قیمتوں کے لیے مستدق ہے ہم کسی آئندہ موقع پر بیان کرینگے۔ فی الحال طالب علم کو چاہیے کہ ان سلسلوں کو اچھی طرح یاد رکھے اور یہ ذہن نشین کرلے کہ اگرچہ $1-\frac{1}{ن}$، $1-\frac{2}{ن}$ … $1-\frac{ر}{ن}$ میں سے ہر ایک کی انتہا ۱ ہے لیکن جب ان اجزائے ضربی کی تعداد بہت بڑی یعنی لاتناہی ہوجاتی ہے تو ہم نہیں کہہ سکتے کہ حاصل ضرب کی انتہا بھی ۱ ہوگی۔

اسی کے ساتھ ہم $(1+\frac{لا}{ن})^{ن}$ کی انتہا ایک دوسری شکل میں حاصل کرینگے۔

اگر لا = ۰ تو $(1-\frac{لا}{ن})^{ن} = 1^{ن}$ اور اس لیے $\underset{ن\to\infty}{نہا}(1+\frac{لا}{ن})^{ن} = 1$

اور اگر لا ≠ ۰ تو ہم رکھتے ہیں ن = م لا، پس چونکہ لا ایک محدود ہے اس لیے جوں جوں ن بڑھتا جاتا ہے اسی طرح م بھی بڑھتا جاتا ہے یعنے جبکہ ن ← ∞ تو م ← ∞

پس

$$(1+\frac{لا}{ن})^{ن} = (1+\frac{لا}{م لا})^{م لا}$$

$$= \left\{(1+\frac{1}{م})^{م}\right\}^{لا} \quad \dots\dots\dots\dots (3)$$

اب اگرچہ ن مثبت صحیح عدد ہے لیکن لا چونکہ کوئی حقیقی عدد ہوسکتا ہے اس لیے ضروری نہیں ہے کہ م صحیح عدد ہو۔ ہم نے دفعۂ گذشتہ میں ثابت کیا ہے کہ ن جب مثبت صحیح عددوں سے مائل بہ لاتناہی ہوتا ہے تو $(1+\frac{1}{ن})^{ن}$ کی انتہا و ہوتی ہے۔ لیکن یہ بھی ثابت کیا جاسکتا ہے کہ چاہے ن مثبت صحیح عدد ہو یا نہو $\underset{ن\to\infty}{نہا}(1+\frac{1}{ن})^{ن}$ ہمیشہ و کے مساوی ہوتی ہے۔

پس اگر م کوئی عدد ہو تو

$$\underset{م\to\infty}{نہا}(1+\frac{1}{م})^{م} = و \quad \dots\dots\dots\dots (4)$$

اس لیے مساوات (۴) سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\left(1+\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = \underset{\text{م}\to\infty}{\text{نہا}}\left\{\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right)^{\text{م}}\right\}^{\text{لا}}$$

$$= \left\{\underset{\text{م}\to\infty}{\text{نہا}}\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right)^{\text{م}}\right\}^{\text{لا}}$$

$$= \text{و}^{\text{لا}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

جہاں $\text{و}^{\text{لا}}$ اسی طرح ایک قوت نما کو تعبیر کرتا ہے جیسے $\text{و}^{2}$۔ پس ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ لا کی تمام قیمتوں کے لیے

$$\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\left(1+\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = 1 + \text{لا} + \frac{\text{لا}^2}{\underline{|2}} + \frac{\text{لا}^3}{\underline{|3}} + \cdots + \frac{\text{لا}^{\text{ر}}}{\underline{|\text{ر}}} + \cdots \infty \ \text{ارقام}$$

$$= \text{و}^{\text{لا}}$$

$$= (2.7182818\ldots\ldots)^{\text{لا}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

اس میں اگر ہم بطور خاص صورت کے لا = ۱ رکھیں تو ملتا ہے کہ

$$\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\left(1+\frac{1}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = 1 + 1 + \frac{1}{\underline{|2}} + \frac{1}{\underline{|3}} + \ldots\ldots\ldots$$

$$= \text{و} = 2.7182818$$

جو گزشتہ دفعہ کی مساوات (۹) میں حاصل ہوا تھا۔

اس کے علاوہ ہم اوپر بتلا چکے ہیں کہ اگر لا = ۰ تو $\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\left(1+\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = 1$

پس

$$\text{و}^{0} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

نیز اگر لا اور ما کوئی دو عدد ہوں جو صفر نہ ہوں تو

$$\text{و}^{\text{لا}+\text{ما}} = \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\left(1+\frac{\text{لا}+\text{ما}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

اس میں رکھو ن = م (لا + ما) تو م ← ∞ جبکہ ن ← ∞

پس

$$\left(1+\frac{\text{لا}+\text{ما}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = \left(1+\frac{\text{لا}+\text{ما}}{\text{م}(\text{لا}+\text{ما})}\right)^{\text{م}(\text{لا}+\text{ما})}$$

$$= \left\{\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right)^{\text{م}}\right\}^{\text{لا}+\text{ما}}$$

$$= \left\{\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right)^{\text{م}}\right\}^{\text{لا}} \times \left\{\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right)^{\text{م}}\right\}^{\text{ما}}$$

اس لیے

$$\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\left(1+\frac{\text{لا}+\text{ما}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = \underset{\text{م}\to\infty}{\text{نہا}}\left[\left\{\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right)^{\text{م}}\right\}^{\text{لا}} \times \left\{\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right)^{\text{م}}\right\}^{\text{ما}}\right]$$

$$= \left\{\underset{\text{م}\to\infty}{\text{نہا}}\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right)^{\text{م}}\right\}^{\text{لا}} \times \left\{\underset{\text{م}\to\infty}{\text{نہا}}\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right)^{\text{م}}\right\}^{\text{ما}}$$

$$= \text{و}^{\text{لا}} \times \text{و}^{\text{ما}} \qquad \text{........ (۹)}$$

پس مساواتوں (۸) اور (۹) سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{و}^{\text{لا}+\text{ما}} = \text{و}^{\text{لا}} \times \text{و}^{\text{ما}} \qquad \text{........ (۱۰)}$$

یہ مساوات (۱۰) چونکہ لا اور ما کی تمام قیمتوں کے لیے صحیح ہے اس لیے بطور خاص صورت کے ہم اس میں درج کرتے ہیں کہ ما = ــ لا، تب

$$\text{و}^{\text{لا}-\text{لا}} = \text{و}^{\text{لا}} \times \text{و}^{-\text{لا}}$$

یعنی

$$\text{و} = \text{و}^{\text{لا}} \times \text{و}^{-\text{لا}}$$

یعنی

$$1 = \text{و}^{\text{لا}} \times \text{و}^{-\text{لا}}$$

پس

$$\text{و}^{-\text{لا}} = \frac{1}{\text{و}^{\text{لا}}} \qquad \text{........ (۱۱)}$$

غرض ہم دیکھتے ہیں کہ تفاعل و^لا تمام قوت نمائی قوانین کو پورا کرتا ہے
تفاعل و^لا کو "قوت نمائی تفاعل" کہتے ہیں۔

و^لا کے لیے جو سلسلہ $۱ + لا + \frac{لا^۲}{۲!} + \frac{لا^۳}{۳!} + \dots$ حاصل ہوتا ہے
اس کی مدد سے بآسانی دیکھا جا سکتا ہے کہ لا کی تمام مثبت قیمتوں کے لیے تفاعل و^لا
کی قیمت مثبت ہوتی ہے اور اگر لا منفی ہو یعنے ۔ما کے برابر ہو جہاں ما مثبت
ہے تو $و^{لا} = و^{-ما} = \frac{۱}{و^{ما}}$ اور چونکہ ما مثبت ہے اس لیے و^ما مثبت ہے اور اس لیے
$\frac{۱}{و^{ما}}$ بھی مثبت ہے۔ پس معلوم ہوا کہ لا کی منفی قیمتوں کے لیے بھی تفاعل و^لا کی
قیمت مثبت ہوتی ہے۔ غرض کہ و^لا کی قیمت ہمیشہ مثبت ہوتی ہے چاہے لا مثبت
ہو یا منفی

نیز اگر لا > ۰ تو

$و^{لا} > ۱ + لا$

اس لیے جوں جوں لا بڑھتا جاتا ہے اسی طرح و^لا بھی بڑھتا جاتا ہے یعنے

$نہا_{لا \to \infty} و^{لا} = \infty$ . . . . . . . . . . . . (۱۲)

اب اگر لا ایک منفی عدد ہو اور ۔ما کے مساوی ہو جہاں ما مثبت عدد ہے تو

$و^{لا} = و^{-ما} = \frac{۱}{و^{ما}}$

لیکن جب لا ← ۔∞ تو ما ← +∞

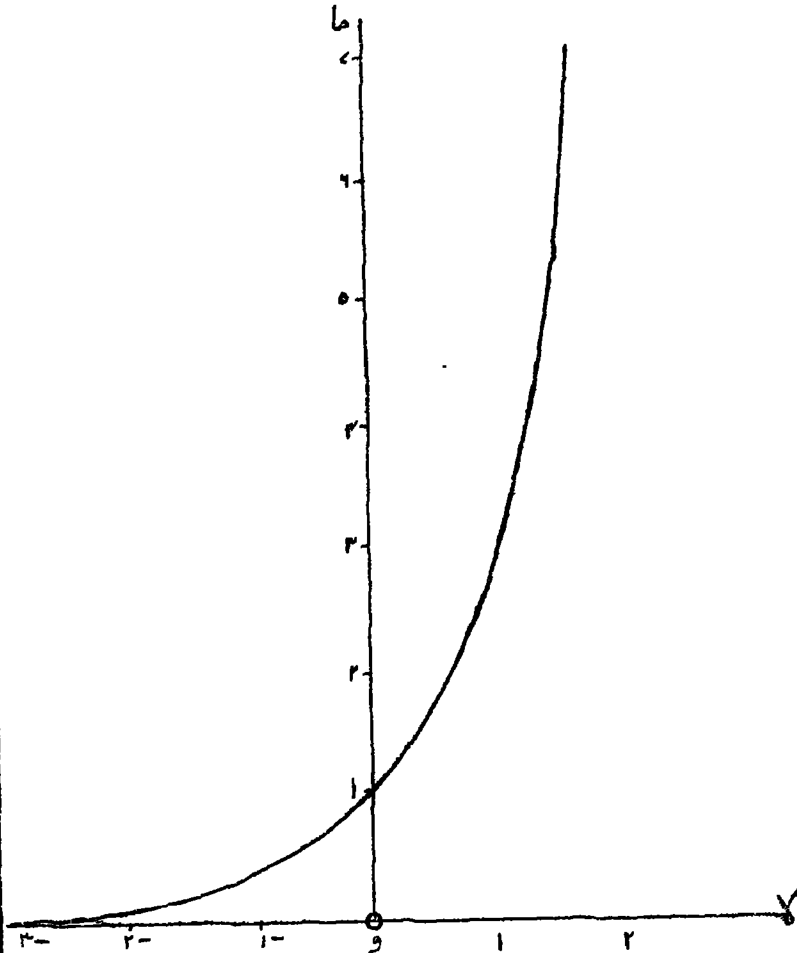
اس لیے

$نہا_{لا \to -\infty} و^{لا} = نہا_{ما \to \infty} \frac{۱}{و^{ما}}$

= ۰ . . . . . . . . . . . . (۱۳)

غرض کہ و^لا کی چھوٹی سے چھوٹی قیمت صفر ہے جبکہ لا = ۔∞ ہو
اور اس کے بعد اس کی قیمت بڑھتی جاتی ہے یہاں تک کہ لا = ۰ کے لیے
قیمت ۱ ہو جاتی ہے اور پھر بڑھتے ہوئے لا = +∞ پر تفاعل و^لا کی قیمت
بھی +∞ ہو جاتی ہے۔ ذیل میں ہم اس تفاعل کی ترسیم دیتے ہیں جس سے
منحنی ما = و^لا کی شکل طالب علم کو معلوم ہو جائیگی۔

شکل سے ظاہر ہے کہ لا کی مثبت قیمتوں کے لیے تفاعل وُلا بہت جلد بڑھتا جاتا ہے




منحنی ما = وُلا کی ترسیم

اور لا کی منفی قیمتوں کے لیے بہت جلد گھٹتا ہے۔ نیز یہ بھی فوراً معلوم ہوتا ہے کہ منحنی مسلسل ہے یعنے تفاعل وُلا کی قیمت بتدریج مسلسل بدلتی ہے یعنے تفاعل وُلا لا کی تمام قیمتوں کے لیے مسلسل ہے۔ اس کا باضابطہ ثبوت بھی دیا جاسکتا ہے۔ اسی ضمن میں ہم ایک انتہا کی قیمت معلوم کرینگے جس کی ہمیں آئندہ ضرورت

ہوگی۔

فرض کرو کہ ھ کوئی چھوٹا عدد ہے تب

$$\text{و}^{\text{ھ}} = ۱ + \text{ھ} + \frac{\text{ھ}^{۲}}{\lfloor ۲} + \frac{\text{ھ}^{۳}}{\lfloor ۳} + \frac{\text{ھ}^{۴}}{\lfloor ۴} + \cdots\cdots$$

اس لیے

$$\text{و}^{\text{ھ}} - ۱ = \text{ھ} + \frac{\text{ھ}^{۲}}{\lfloor ۲} + \frac{\text{ھ}^{۳}}{\lfloor ۳} + \frac{\text{ھ}^{۴}}{\lfloor ۴} + \cdots\cdots$$

اس لیے

$$\frac{\text{و}^{\text{ھ}} - ۱}{\text{ھ}} = ۱ + \text{ھ}\left(\frac{۱}{\lfloor ۲} + \frac{\text{ھ}}{\lfloor ۳} + \frac{\text{ھ}^{۲}}{\lfloor ۴} + \cdots + \frac{\text{ھ}^{\text{ن}}}{\lfloor \text{ن}+۲} + \cdots\right)$$

لیکن اگر ھ $<$ ۱ تو

$$\frac{۱}{\lfloor ۲} + \frac{\text{ھ}}{\lfloor ۳} + \frac{\text{ھ}^{۲}}{\lfloor ۴} + \cdots < \frac{۱}{\lfloor ۲} + \frac{۱}{\lfloor ۳} + \frac{۱}{\lfloor ۴} + \cdots$$

$$< \text{و}$$

پس ھ کی کافی چھوٹی قیمتوں کے لیے

$$\frac{\text{و}^{\text{ھ}} - ۱}{\text{ھ}} < ۱ + \text{ھ}.\text{و} \quad \cdots\cdots\cdots (۱۴)$$

اب ظاہر ہے کہ ھ کی کافی چھوٹی قیمت لینے پر ہم ھ و کو جتنا چاہیں چھوٹا کر سکتے ہیں یعنی $\frac{\text{و}^{\text{ھ}}-۱}{\text{ھ}}$ کو ۱ کے جتنا چاہیں قریب لا سکتے ہیں پس

$$\text{نہا}_{\text{ھ} \to ۰} \frac{\text{و}^{\text{ھ}} - ۱}{\text{ھ}} = ۱ \quad \cdots\cdots\cdots (۱۵)$$

## ۲۶ء۳ - لوکارثمی تفاعل -

تعریف :- یہ تفاعل اوپر کے قوت نمائی تفاعل وٗ کا معکوس ہے یعنی اگر ما کوئی حقیقی عدد ہو اور اگر وٗلا کی قیمت ما کے مساوی ہو تو کہتے ہیں کہ "ما لوکارثم ہے لا کا اساس و پر" اور اس کو "لوگ و لا" لکھتے ہیں۔ یعنی اگر

$$\text{لا} = \text{و}^{\text{ما}} \quad \cdots\cdots\cdots (۱)$$

تو

ما = لوگو لا ................ (۲)

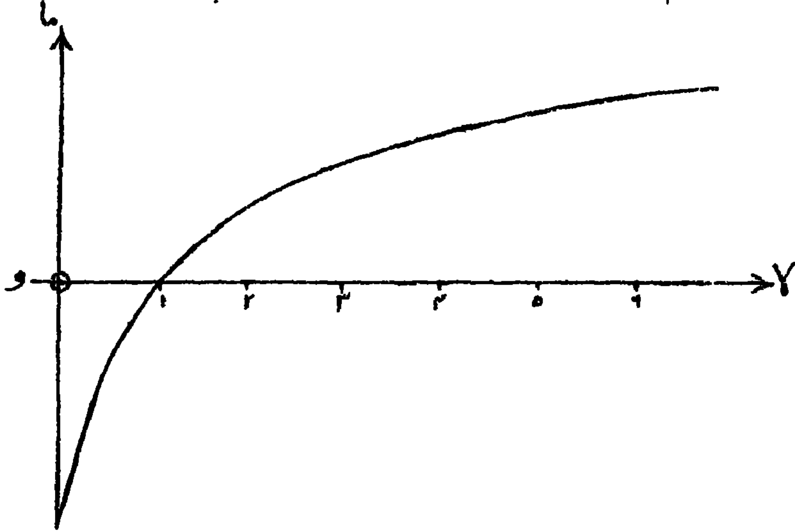
اس تفاعل کے مفہوم کو سمجھنے کے لیے فرض کرو کہ ہمیں ایک حقیقی عدد لا دیا گیا ہے ہم دریافت کرنا چاہتے ہیں کہ عدد و کو کس قوت پر اُٹھایا جائے کہ حاصل لا ملے اسی مطلوبہ قوت کو ہم لوگو لا کہتے ہیں اور ما = لوگو لا کو لوکارتمی تفاعل کہتے ہیں ۔ اس کو "نیپیر کے لوکارتم" یا "طبعی لوکارتم" بھی کہتے ہیں اور لوگ کے نیچے حرف و اس لیے لکھا جاتا ہے تاکہ اس کو معمولی لوکارتموں سے جو ۱۰ کے اساس پر لیے جاتے ہیں، تمیز کیا جاسکے ۔ آئندہ ہم جب کبھی لوگ لا لکھیں تو اس سے مراد یہی لوگو لا ہوگی ۔ اگر ہمیں ۱۰ کے اساس والے لوکارتم کی ضرورت ہو تو ہم اس کو ہمیشہ لوگ۱۰ لا سے تعبیر کرینگے ۔

اب ہم تفاعل ما = لوگ لا کی قیمتوں پر غور کرینگے ۔ یہاں چونکہ

لا = وما

اور دفعہ گذشتہ میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر (۱) ما = −∞ تو لا = و−∞ = ۰ (۲) اگر ما = ۰ تو لا = و۰ = ۱ (۳) اور اگر ما = +∞ تو لا = و+∞ = ∞ یعنی جب ما −∞ سے شروع کرکے صفر میں سے ہوتے ہوئے +∞ تک جاتا ہے تو لا صفر سے شروع کرکے ۱ میں سے ہوتے ہوئے +∞ تک جاتا ہے پس معلوم ہوا کہ ما = لوگ لا کی قیمت (۱) لا = ۰ تو ما = −∞ (۲) لا = ۱ تو ما = ۰ اور (۳) لا = ∞ تو ما = ∞ ہے یعنی جبکہ لا صفر سے شروع کرکے ۱ میں سے ہوتے ہوئے +∞ تک جاتا ہے تو ما −∞ سے شروع کرکے صفر میں سے ہوتے ہوئے +∞ تک جاتا ہے ۔ یعنی تفاعل لوگ لا کی قیمت متغیر لا کی صرف مثبت قیمتوں کے لیے موجود ہے اور لا کی منفی قیمتوں کے لیے لوگ لا کی قیمت موجود نہیں ہے ۔ لا کی قیمت صفر تا ۱ کے لیے لوگ لا کی قیمت منفی ہوتی ہے ۔ لا = ۱ کے لیے لوگ لا = ۰ اور لا کی ۱ سے بڑی قیمتوں کے لیے لوگ لا مثبت ہوتا ہے اور لا کے ساتھ بڑا ہوتا جاتا ہے ۔ منحنی ما = لوگ لا کی ترسیم ذیل کی شکل میں دی گئی ہے جس سے معلوم ہوگا کہ لوگ لا کا منحنی مسلسل ہے

یعنے لا کی تمام مثبت قیمتوں کے لیے لوک لا ایک مسلسل تفاعل ہے۔




منحنی ۱ = لوک و لا کی ترسیم

لوک لا کی اس تعریف کی بنا پر ہم کو حسب ذیل خاصیتیں حاصل ہوتی ہیں :-

(الف) فرض کرو کہ لا = $و^{\text{ما}}$ یعنے ما = لوک لا، تب

$و^{\text{لوک لا}}$ = $و^{\text{ما}}$ = لا .............. (۳)

(ب) نیز

لوک $و^{\text{ما}}$ = لوک لا = ما .............. (۴)

یہ خاصیتیں جو مساواتوں (۳) اور (۴) سے تعبیر ہوتی ہیں بدیہی ہیں کیونکہ اعمال قوت نما اور لوکارتھم منقلوب تفاعل ہیں۔ اور اس لیے اگر ہم ایک عدد لا کا لوکارتھم لیں، اور پھر و کو اس لوکارتھم کی قوت پر اٹھائیں تو ہمیں وہی ابتدائی عدد لا حاصل ہونا چاہیے۔ اس طرح ہم اگر و کو ایک قوت ما پر اٹھائیں اور پھر اس حاصل کا لوکارتھم لیں تو ہمیں وہی ابتدائی عدد ما حاصل ہونا چاہیئے

کیونکہ یہ دونوں اعمال ایک دوسرے کو زائل کر دیتے ہیں۔

(ج) فرض کرو کہ ا اور ب کوئی دو مثبت حقیقی عدد ہیں اور فرض کرو کہ

$$\text{لا} = \text{لوک ا} \ , \quad \text{ما} = \text{لوک ب}$$

یعنے

$$\text{و}^{\text{لا}} = \text{ا} \ , \quad \text{و}^{\text{ما}} = \text{ب}$$

اب ہمیں معلوم ہے کہ

$$\text{و}^{\text{لا}} \times \text{و}^{\text{ما}} = \text{و}^{\text{لا} + \text{ما}}$$

اس لیے

$$\text{ا} \times \text{ب} = \text{و}^{\text{لوک ا} + \text{لوک ب}}$$

اس مساوات میں دونوں طرف لوکارتم لینے پر ملتا ہے کہ

$$\text{لوک اب} = \text{لوک و}^{\text{لوک ا} + \text{لوک ب}}$$

$$= \text{لوک ا} + \text{لوک ب} \quad \ldots\ldots\ldots \ (\text{۵})$$

پس معلوم ہوتا ہے کہ دو عددوں کے حاصل ضرب کا لوکارتم ان عددوں کے لوکارتموں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

(د) مساوات (۵) میں ب چونکہ کوئی عدد ہو سکتا ہے اس لیے ہم لیتے ہیں کہ $\text{ب} = \frac{1}{\text{ا}}$ جہاں ا کوئی مثبت عدد ہے، پس

$$\text{لوک ا} \times \frac{1}{\text{ا}} = \text{لوک ا} + \text{لوک } \frac{1}{\text{ا}}$$

یعنے

$$\text{لوک } 1 = \text{لوک ا} + \text{لوک } \frac{1}{\text{ا}}$$

چونکہ $\text{لوک } 1 = 0$ اس لیے

$$0 = \text{لوک ا} + \text{لوک } \frac{1}{\text{ا}}$$

یعنے

$$\text{لوک } \frac{1}{\text{ا}} = -\ \text{لوک ا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \ (\text{۶})$$

(ھ) اب فرض کرو کہ ا کوئی مثبت عدد ہے تو ہمیں معلوم ہے کہ

$$\text{ا} = \text{و}^{\text{لوک ا}}$$

اس لیے اگر لا کوئی حقیقی عدد ہو تو ہم $ر^{لا}$ کی حسبِ ذیل تعریف کرتے ہیں:

$$ر^{لا} = \{و^{لوک\ ر}\}^{لا} = و^{لا\ لوک\ ر} \quad \text{..........} \quad (۷)$$

یعنی $ر^{لا} = ۱ + لا\ لوک\ ر + \frac{لا^{۲}}{|۲}(لوک\ ر)^{۲} + \frac{لا^{۳}}{|۳}(لوک\ ر)^{۳} + \frac{لا^{۴}(لوک\ ر)^{۴}}{|۴} + \dots \infty$ ارقام (۸)

نیز (۷) میں دونوں طرف لوکارتم لینے سے ملتا ہے کہ

$$لوک\ ر^{لا} = لوک\ و^{لا\ لوک\ ر} = لا\ لوک\ ر \quad \text{........} \quad (۹)$$

(و) اساس و کے لحاظ سے معلوم کیے ہوئے لوکارتموں کو اساس ۱۰ کے لحاظ سے لوکارتموں میں اور اس کے برعکس، اساس ۱۰ کے لحاظ سے معلوم کیے ہوئے لوکارتموں کو اساس و کے لحاظ سے لوکارتموں میں تبدیل کرنے کے لیے حسبِ ذیل قاعدہ اختیار کیا جاتا ہے:۔

فرض کرو کہ $لوک_{۱۰}\ لا = ما$

تو $لا = ۱۰^{ما}$

اس لیے دونوں طرف اساس و پر لوکارتم لینے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$لوک_{و}\ لا = ما\ لوک_{و}\ ۱۰$$

یعنی $ما = \frac{لوک_{و}\ لا}{لوک_{و}\ ۱۰}$

یعنی

$$لوک_{۱۰}\ لا = لوک_{و}\ لا \times \frac{۱}{لوک_{و}\ ۱۰} \quad \text{........} \quad (۱۰)$$

لیکن حساب لگا کر معلوم کیا گیا ہے کہ

$$\frac{۱}{لوک_{و}\ ۱۰} = ٫۴۳۴۲۹ \quad \text{..........} \quad (۱۱)$$

# مشقی سوالات ۹

ذیل کی انتہائیں دریافت کرو :-

(۱) $\underset{\text{لا}\to ۱}{\text{نہا}} \frac{\text{لا}^{۲} - ۱}{\text{لا} - ۱}$ (۲) $\underset{\text{لا}\to ۲}{\text{نہا}} \frac{\text{لا}^{\frac{۳}{۲}} - ۸^{\frac{۱}{۲}}}{\text{لا} - ۲}$ (۳) $\underset{\text{لا}\to -\text{ل}}{\text{نہا}} \frac{\text{لا}^{۳} + \text{ل}^{۳}}{\text{لا} + \text{ل}}$

(۴) $\underset{\text{لا}\to \text{ل}}{\text{نہا}} \frac{\text{لا}^{۲ن} - \text{ل}^{۲ن}}{\text{لا} - \text{ل}}$ (۵) $\underset{\text{لا}\to -\text{ل}}{\text{نہا}} \frac{\text{لا}^{۲ن+۱} + \text{ل}^{۲ن+۱}}{\text{لا} + \text{ل}}$ (۶) $\underset{\text{ھ}\to ۰}{\text{نہا}} \frac{(\text{لا}+\text{ھ})^{۳} - \text{لا}^{۳}}{\text{ھ}}$

(۷) $\underset{\text{ھ}\to ۰}{\text{نہا}} \frac{(\text{لا}+\text{ھ})^{\frac{۲}{۳}} - \text{لا}^{\frac{۲}{۳}}}{\text{ھ}}$ (۸) $\underset{\text{ھ}\to ۰}{\text{نہا}} \frac{(\text{لا}+\text{ھ})^{\frac{۱}{۴}} - \text{لا}^{\frac{۱}{۴}}}{\text{ھ}}$

(۹) $\underset{\text{ھ}\to ۰}{\text{نہا}} \frac{(\text{لا}+\text{ھ})^{\frac{۱}{ن}} - \text{لا}^{\frac{۱}{ن}}}{\text{ھ}}$ (۱۰) $\underset{\text{لا}\to \text{ب}}{\text{نہا}} \frac{\text{لا}^{۴} - ۴\text{لا}^{۳}\text{ب} + ۶\text{لا}^{۲}\text{ب}^{۲} - ۴\text{لا}\text{ب}^{۳} + \text{ب}^{۴}}{(\text{لا}^{۲} - \text{ب}^{۲})(\text{لا}^{۲} - \text{ل}^{۲})}$

(۱۱) $\underset{\text{لا}\to ۰}{\text{نہا}} \frac{\sqrt{\text{ل}+\text{لا}} - \sqrt{\text{ل}}}{\text{لا}}$ (۱۲) $\underset{\text{لا}\to -۲}{\text{نہا}} \frac{\text{لا}^{۳} + ۸}{\text{لا}^{۵} + ۳۲}$

(۱۳) $\underset{\text{لا}\to \text{ل}}{\text{نہا}} \frac{\text{لا}^{۲} - \text{ل}^{۲}}{\text{لا}^{۳} - \text{ل}^{۳}}$ (۱۴) $\underset{\text{لا}\to \text{ل}}{\text{نہا}} \frac{\text{لا} - \text{ل}}{\text{لا}^{ن} - \text{ل}^{ن}}$ (۱۵) $\underset{\text{لا}\to \text{ل}}{\text{نہا}} \frac{\sqrt{\text{لا}} - \sqrt{\text{ل}}}{\text{لا}^{\frac{۱}{۳}} - \text{ل}^{\frac{۱}{۳}}}$

**۴۷ ء ۲** - $\underset{\text{طہ}\to ۰}{\text{نہا}} \frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}} = ۱$ اور $\underset{\text{طہ}\to ۰}{\text{نہا}} \frac{\text{مس طہ}}{\text{طہ}} = ۱$

(زاویہ طہ کو نیم قطریوں میں ناپا گیا ہے)

ذیل کی شکل میں فرض کرو کہ ن و ا نیم قطریوں میں ایک زاویہ طہ کو تعبیر کرتا ہے جو $\frac{\pi}{۲}$ سے کم ہے اور جو نصف قطر ر والے دائرہ کے مرکز و پر واقع ہے۔

فرض کرو کہ مرن ایک دائرہ کا وتر ہے جس کا مرکز و اور نصف قطر ر ہے۔ ن ت نقطۂ ن پر کا مماس اور مرت نقطۂ مر پر کا مماس ہے اور خطِ مستقیم و ت خط ن مر کو نقطۂ ب پر اور قوس ن مر کو نقطۂ ا پر قطع کرتا ہے۔

فرض کرو کہ زاویۂ ن و ا = طہ نیم قطری ؛ تب ظاہر ہے کہ

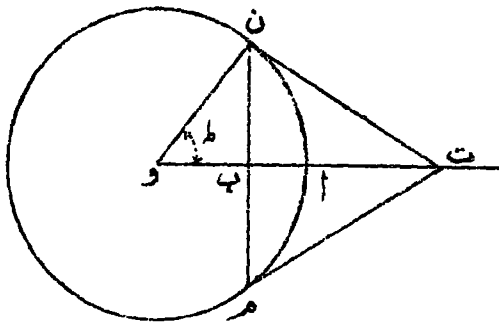
$$\text{وتر ن م} < \text{قوس ن م} < \text{ن ت} + \text{ت م} \quad \ldots\ldots (۱)$$

اس لیے

$$\tfrac{1}{2}\,\text{وتر ن م} < \tfrac{1}{2}\,\text{قوس ن م} < \tfrac{1}{2}\,(\text{ن ت} + \text{ت م})$$

یعنے

$$\text{ن ب} < \text{قوس ن ا} < \text{ن ت} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$




اس لیے

$$\frac{\text{ن ب}}{\text{و ن}} < \frac{\text{قوس ن ا}}{\text{و ن}} < \frac{\text{ن ت}}{\text{و ن}} \quad \ldots\ldots (۳)$$

پس تعریفوں کے بموجب

$$\text{جب ط} < \text{ط} < \text{مس ط} \quad \ldots\ldots (۴)$$

اگر اِس نامساوات میں ہر ایک جملہ کو جب ط سے تقسیم کیا جائے تو ملتا ہے

$$۱ < \frac{\text{ط}}{\text{جب ط}} < \frac{۱}{\text{جم ط}}$$

اگر اس آخری نامساوات میں رقموں کو اُلٹ دیا جائے تو حاصل ہوتا ہے:

$$۱ > \frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} > \text{جم ط} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵)$$

یعنے ہم دیکھتے ہیں کہ چاہے ط کی کچھ ہی قیمت کیوں نہ ہو کسر $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}$ کی قیمت ہمیشہ ۱ اور جم ط کی قیمت کے درمیان واقع ہوتی ہے۔ لیکن ہمیں معلوم ہے کہ

$$\text{نہا}_{\text{ط} \to ۰}\ \text{جم ط} = \text{جم } ۰ = ۱$$

یعنے طہ کی کافی چھوٹی قیمت لینے پر جم طہ کو جس قدر چاہیں ا کے قریب لاسکتے ہیں اور اس وقت $\frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}}$ بدرجۂ اولیٰ ا کے قریب آجائیگا اس لیے

$$\underset{\text{طہ}\leftarrow\cdot}{\text{نہا}} \frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}} = ۱ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۶)$$

اسی طرح اگر نامساوات (۴) کی ہر رقم کو مس طہ سے تقسیم کیا جائے تو ملتا ہے

$$\text{جم طہ} < \frac{\text{طہ}}{\text{مس طہ}} < ۱$$

اور اگر اس میں رقموں کو اُلٹ دیا جائے تو

$$\frac{۱}{\text{جم طہ}} > \frac{\text{مس طہ}}{\text{طہ}} > ۱ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۷)$$

$$\text{اب چونکہ}\ \underset{\text{طہ}\leftarrow\cdot}{\text{نہا}} \frac{۱}{\text{جم طہ}} = \frac{۱}{\underset{\text{طہ}\leftarrow\cdot}{\text{نہا}}\ \text{جم طہ}} = ۱$$

یعنے طہ کو کافی چھوٹا لینے پر $\frac{۱}{\text{جم طہ}}$ کو ہم جس قدر چاہیں ا کے قریب لاسکتے ہیں اس لیے $\frac{\text{مس طہ}}{\text{طہ}}$ بدرجۂ اولیٰ ا کے قریب آجاتا ہے، پس

$$\underset{\text{طہ}\leftarrow\cdot}{\text{نہا}} \frac{\text{مس طہ}}{\text{طہ}} = ۱ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۸)$$

غرض کہ $\frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}}$ اور $\frac{\text{مس طہ}}{\text{طہ}}$ دونوں کی اِنتہا ا ہے جبکہ طہ مائل بہ صفر ہو فرق یہ ہے کہ $\frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}}$ ہمیشہ ا سے چھوٹا رہتا ہے اور بڑھتے ہوئے بتدریج ا کے قریب آتا ہے۔ اس کے برخلاف $\frac{\text{مس طہ}}{\text{طہ}}$ ہمیشہ ا سے بڑا رہتا ہے اور گھٹتے ہوئے بتدریج ا کی طرف آتا ہے۔

$$\text{نیز ہم دیکھتے ہیں کہ}\ \frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}} = \frac{\text{ب ن}}{\text{و ن}} \div \frac{\text{قوس ا ن}}{\text{و ن}} = \frac{\text{ب ن}}{\text{قوس ا ن}}$$

لیکن جب زاویۂ طہ چھوٹا ہوتا ہے تو نقطۂ ن محیط پر نقطۂ ا کے قریب

آتا ہے اور اس لیے قوس ان اور نیز خط ب ن دونوں صفر کی طرف مائل ہوتے ہیں۔ یعنے اگرچہ $\underset{\text{ط} \to \cdot}{\text{نہا}}$ قوس ا ن = ۰
اور $\underset{\text{ط} \to \cdot}{\text{نہا}}$ خط ب ن = ۰ لیکن

$$\underset{\text{ط} \to \cdot}{\text{نہا}} \frac{\text{ب ن}}{\text{قوس ا ن}} = ۱$$

پس معلوم ہوتا ہے کہ اگرچہ دو مقداریں خود بے حد چھوٹی کیوں نہ ہو جائیں ان کی نسبت ایک محدود عدد ہو سکتی ہے، یعنے یہ ضروری نہیں ہے کہ دو بے حد چھوٹی مقداروں کی نسبت بھی چھوٹی ہو۔

ذیل میں ایک جدول کی مدد سے ہم بتلائینگے کہ اگر ط چھوٹا ہوتا ہے تو $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}$ کی کیا قیمت ہوتی ہے اور یہ نسبت کس طرح ۱ کے قریب ہوتی جاتی ہے:

اگر ط = ۵° تو ط = ۰٫۰۸۷۲۶۶۵ نیم قطری، جب ط = ۰٫۰۸۷۱۵۵۷؛ $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}$ = ۰٫۹۹۸۷۳؛

ط = ۲° تو ط = ۰٫۰۳۴۹۰۶۶ ″ ، جب ط = ۰٫۰۳۴۸۹۹۵؛ $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}$ = ۰٫۹۹۹۸۰؛

ط = ۱° تو ط = ۰٫۰۱۷۴۵۳۳ ″ ، جب ط = ۰٫۰۱۷۴۵۲۴؛ $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}$ = ۰٫۹۹۹۹۵؛

ط = ۳۰′ تو ط = ۰٫۰۰۸۷۲۶۶ ″ ، جب ط = ۰٫۰۰۸۷۲۶۵؛ $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}$ = ۰٫۹۹۹۹۹؛

ط = ۱۰′ تو ط = ۰٫۰۰۲۹۰۸۹ ″ ، جب ط = ۰٫۰۰۲۹۰۸۹؛ $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}$ = ۰٫۹۹۹۹۹۹....؛

وغیرہ

**نوٹ ۱۔** یاد رکھنا چاہیے کہ $\underset{\text{ط} \to \cdot}{\text{نہا}} \frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} = ۱$ صرف اسی صورت میں صحیح ہے جبکہ ط کو نیم قطریوں میں ناپا جائے۔ اگر زاویۂ لا کو درجوں میں ناپا جائے تو

$$\underset{\text{لا} \to \cdot}{\text{نہا}} \frac{\text{جب لا}^\circ}{\text{لا}^\circ} = \underset{\text{لا} \to \cdot}{\text{نہا}} \frac{\text{جب لا}^\circ}{\text{لا} \frac{\pi}{۱۸۰}} \times \frac{\pi}{۱۸۰} = ۱ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = ۰٫۰۱۷$$

جیسا کہ ہم نے دفعہ ۵۵، مثال ۲ میں بیان کیا تھا۔

دوسری بات یہ ہے کہ جس زاویہ کی جیب لے رہے ہیں اس کو اسی زاویہ سے تقسیم کرنے کے بعد اگر زاویہ کو صفر کی طرف مائل کریں تو

نسبت کی انتہا ۱ ہوتی ہے یعنے یہ صحیح نہیں ہے کہ $\text{نہا}_{\text{لا}\to ۰} \frac{\text{جب ۲ لا}}{\text{لا}} = ۱$
بلکہ اس انتہا کو یوں معلوم کرنا چاہیے :

$$\text{نہا}_{\text{لا}\to ۰} \frac{\text{جب ۲ لا}}{\text{لا}} = \text{نہا}_{\text{لا}\to ۰}\ ۲\ \frac{\text{جب ۲ لا}}{\text{۲ لا}} = ۲\ \text{نہا}_{\text{لا}\to ۰} \frac{\text{جب ۲ لا}}{\text{۲ لا}}$$

$$= ۲ \times ۱ = ۲$$

یعنے $\frac{\text{جب ۲ لا}}{\text{لا}}$ کی انتہا ۲ ہوتی ہے نہ کہ ۱ ۔

## مشقی سوالات ۷

ذیل کی انتہائیں دریافت کرو :-

(۱) $\text{نہا}_{\text{ط}\to ۰} \frac{\text{جب ۳ ط}}{\text{جب ط}}$　　(۲) $\text{نہا}_{\text{لا}\to ۰} \frac{\text{جب ۲ لا}}{\text{مس ۳ لا}}$

(۳) $\text{نہا}_{\text{لا}\to ۰} \frac{\text{۲ لا}^{۲}\ \text{جم}^{۲}\ \text{لا}}{\text{۱ − جم ۲ لا}}$　　(۴) $\text{نہا}_{\text{لا}\to ۰} \frac{\text{۳ جب لا − جب ۳ لا}}{\text{لا}^{۳}}$

(۵) $\text{نہا}_{\text{لا}\to ۰} \frac{\text{۲ جب لا − جب ۲ لا}}{\text{لا}^{۳}}$　　(۶) $\text{نہا}_{\text{لا}\to ۰} \frac{\text{مس}^{۲}\ \text{لا − جب}^{۲}\ \text{لا}}{\text{لا}^{۴}}$

(۷) $\text{نہا}_{\text{لا}\to ۰} \frac{\text{۱ − جم ۴ لا}}{\text{لا}^{۲}}$　　(۸) $\text{نہا}_{\text{لا}\to ۰} \frac{\text{مس ۲ لا − جب ۲ لا}}{\text{لا}^{۳}}$

(۹) $\text{نہا}_{\text{لا}\to ۰} \frac{\text{جب ۳ لا − جم ۲ لا}}{\text{جب ۲ لا}}$　　(۱۰) $\text{نہا}_{\text{لا}\to \text{عہ}} \frac{\text{لا جب عہ − عہ جب لا}}{\text{لا − عہ}}$



# باب سوم

# تفرّق اور تفرّقی سر

**۳،۱** :- اس باب میں متبوع متغیر کی قیمت میں تغیر کی وجہ سے تفاعل کی قیمت میں جو تبدیلی واقع ہوتی ہے اس پر غور کیا جائیگا۔ بالخصوص متبوع متغیر اور تفاعل کی قیمتوں میں تبدیلی کی نسبت لی جائیگی۔ اور اس سے بدلنے کی شرح کا ناپ دریافت کیا جائیگا۔ یہ ناپ علمِ احصار کی بنیاد ہے۔

**۳،۲** :- **فرق** : فرض کرو کہ ما = ف (لا) کوئی تفاعل ہے اس کے کسی نقطہ لا = ا پر غور کرو۔ اب اگر متبوع متغیر لا کی قیمت ا + ھ کردی جائے تو متبوع متغیر کی قیمتوں میں فرق ھ ہے۔ اس امر کو علامتوں سے بیان کرنے کے لیے اگر محدود فرق کو اختصاراً "مف" سے تعبیر کیا جائے تو لکھ سکتے ہیں کہ مف لا = ھ، علامت مف لا سے لا کا محدود فرق مراد ہے۔ اس کو غلطی سے مف × لا نہ سمجھ لیا جائے۔ اسی طرح ف (لا) میں نقطہ لا = ا پر فرق ہوگا ف (ا + ھ) - ف (ا) جس کو مف [ ف (ا) ] سے تعبیر کیا جاسکتا ہے۔ مثالاً مکانی ما = ۴ لا^۲ کے نقطہ لا = ۲ پر غور کرو۔ اس نقطہ کے محدد (۲، ۱۶) ہونگے۔ اب اگر لا کی قیمت ۳ ہوجائے تو ما = ۳۶ یعنی مف لا = ۱ تو مف ما = ۲۰ اسی طرح

اگر مف لا = ۲+ تو مف ما = ۴۸

مف لا = - ۳/۲ مف ما = - ۱۵

اب مکافی کے ایک دوسرے نقطہ لا = ۵ غور کرو - ظاہر ہے کہ ما = ۱۰۰

اس پر اگر مف لا = ۲ تو مف ما = ۹۶

مف لا = - ۳/۲ مف ما = - ۵۱

مف لا = - ۹/۲ مف ما = - ۹۹ وغیرہ وغیرہ

اس سے ظاہر ہے کہ تابع متغیر کا فرق بالعموم لا اور مف لا دونوں کی قیمتوں پر منحصر ہے - عام صورت میں اگر مکافی کا کوئی نقطہ (لا، ما) ہو تو

مف ما = ۴ (لا + مف لا)² - ۴ لا²

= ۸ لا (مف لا) + ۴ (مف لا)²

یعنی مف ما متبوع متغیر لا اور اس کے فرق مف لا دونوں کا تفاعل ہے اور اس رشتہ میں لا اور مف لا کی دی ہوئی قیمتیں درج کر کے مف ما کی قیمتیں نکالی جا سکتی ہیں -

اسی طرح اگر ما = ف (لا) کے کسی نقطہ (لا، ما) پر غور کریں تو

مف ما = ف (لا + مف لا) - ف (لا)

# توضیحی مثالیں

مثال (۱) ما = (۴ لا + ۵)³ میں مف ما کی قیمت دریافت کرو جبکہ لا = - ۳ اور مف لا = ۱، ۱/۲-، ۱/۲، ۵/۴-

مف ما = [۴ (لا + مف لا) + ۵]³ - (۴ لا + ۵)³

= (۴ لا + ۵ + ۴ مف لا)³ - (۴ لا + ۵)³

= ۳ (۴ لا + ۵)² × (۴ مف لا) + ۳ × (۴ مف لا)² (۴ لا + ۵) + (۴ مف لا)³

= ۱۲ (مف لا) (۴ لا + ۵)² + ۴۸ (مف لا)² (۴ لا + ۵) + ۶۴ (مف لا)³

اس میں لا = - ۳ درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

مف ما = ۱۲ × ۴۹ مف لا - ۴۸ × ۷ × (مف لا)² + ۶۴ (مف لا)³

اس لیے $\text{مف لا} = -۱،\ ۱،\ \frac{۱}{-۲}،\ \frac{۱}{۲}،\ -\frac{۵}{۴}،\ \frac{۵}{۴}$

$\text{مف ما} = -۹۸۸،\ ۳۱۶،\ -۳۸۶،\ ۲۱۸،\ -۱۳۸۵،\ ۳۳۵$

مثال (۲) $\text{ما} = \frac{۴\text{لا}+۳}{۳\text{لا}-۲}$ کے نقطہ $\text{لا} = ۳$ پر مف ما کی قیمت دریافت کرو جبکہ $\text{مف لا} = ۱،\ -۱،\ \frac{۱}{۳}،\ -\frac{۱}{۳}$

$$\text{مف ما} = \frac{۴(\text{لا}+\text{مف لا})+۳}{۳(\text{لا}+\text{مف لا})-۲} - \frac{۴\text{لا}+۳}{۳\text{لا}-۲}$$

$$= \frac{(۴\text{لا}+۳+۴\text{مف لا})(۳\text{لا}-۲) - (۴\text{لا}+۳)(۳\text{لا}-۲+۳\text{مف لا})}{(۳\text{لا}-۲)\left[(۳\text{لا}-۲)+۳\text{مف لا}\right]}$$

$$= \frac{۴\text{مف لا}(۳\text{لا}-۲) - ۳\text{مف لا}(۴\text{لا}+۳)}{(۳\text{لا}-۲)^۲ + ۳\text{مف لا}(۳\text{لا}-۲)}$$

$$= \frac{-۱۷\text{مف لا}}{(۳\text{لا}-۲)^۲ + ۳\text{مف لا}(۳\text{لا}-۲)}$$

نقطہ $\text{لا} = ۳$ پر $\text{مف ما} = \frac{-۱۷\text{مف لا}}{۴۹ + ۲۱\text{مف لا}}$

یعنی $\text{مف لا} = ۱،\ -۱،\ \frac{۱}{۳}،\ -\frac{۱}{۳}$

$\text{مف ما} = \frac{-۱۷}{۷۰}،\ \frac{۱۷}{۲۸}،\ \frac{-۱۷}{۱۶۸}،\ \frac{۱۷}{۱۲۶}$

مثال (۳) ما = جب لا + مس لا کے کسی نقطہ پر مف ما اور مف لا میں رشتہ دریافت کرو۔ نیز اس کی قیمت معلوم کرو جبکہ $\text{لا} = \frac{\pi}{۴}$ اور $\text{مف لا} = \frac{\pi}{۶}،\ \frac{-\pi}{۶}$

$$\text{مف ما} = \text{جب}(\text{لا}+\text{مف لا}) - \text{جب لا} + \text{مس}(\text{لا}+\text{مف لا}) - \text{مس لا}$$

$$= ۲\,\text{جم}\left(\text{لا} + \frac{\text{مف لا}}{۲}\right)\text{جب}\,\frac{\text{مف لا}}{۲} + \frac{\text{جب مف لا}}{\text{جم}(\text{لا}+\text{مف لا})\,\text{جم لا}}$$

اس لیے اگر $\text{لا} = \frac{\pi}{۴}$ اور $\text{مف لا} = \frac{\pi}{۶}$

$$\text{مف ا} = 2\,\text{جم}\,\frac{\pi}{3}\,\text{جب}\,\frac{\pi}{12} + \frac{\text{جب}\,\frac{\pi}{6}}{\text{جم}\,\frac{5\pi}{12}\,\text{جم}\,\frac{\pi}{4}}$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{3}-1}$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \sqrt{3} + 1$$

اور اگر $\text{مف لا} = -\frac{\pi}{6}$

$$\text{تو مف ا} = 2\,\text{جم}\,\frac{\pi}{6}\,\text{جب}\left(-\frac{\pi}{12}\right) + \frac{\text{جب}\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{\text{جم}\,\frac{\pi}{12}\,\text{جم}\,\frac{\pi}{4}}$$

$$= -2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}}{1}$$

$$= -\frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{2}{1+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{4} - \sqrt{3} + 1$$

# مشقی سوالات ۸

(۱) مف ا کی قیمت دریافت کرو :-

(الف) $\text{ا} = (2\text{لا}+3)^2$ جبکہ لا = −۱، مف لا = $\frac{1}{3}$، $-\frac{1}{3}$، $\frac{5}{9}$، $-\frac{7}{5}$، ۲، −۱

(ب) $\text{ا} = (4\text{لا}-7)^3 + 5\text{لا}^2$ جبکہ لا = $\frac{7}{4}$، اور مف لا = $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{3}$، ۱، −۲، $-\frac{1}{5}$

(۲) $\text{ف(لا)} = \frac{5\text{لا}+7}{(3\text{لا}-1)^2}$ میں مف [ف(لا)] کی قیمت دریافت کرو۔
جبکہ لا = $-\frac{7}{5}$ اور مف لا = $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{3}$، ۱، ۰٫۱، −۱

(۳) $\text{ص} = 4\text{ی}^2 - 5\text{ی} + 3$ میں مف ص کی قیمت دریافت کرو
جبکہ ی = ۲ اور مف ی = $-\frac{2}{5}$، $-\frac{3}{5}$

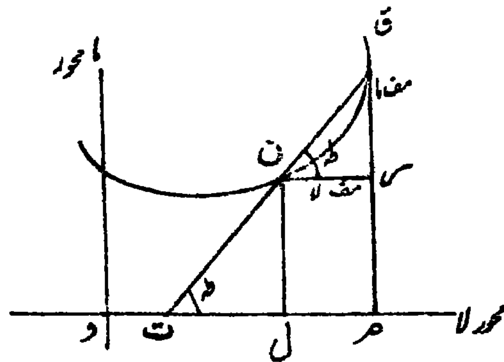
(۴) (ا) لا = ۵ جم طہ
(ب) لا = جب طہ
(ج) لا = - ۵/۴ مس طہ
(د) لا = ۲ قطاطہ + قم طہ

} میں مف لا کی قیمت معلوم کرو جبکہ طہ = ۶۰° اور مف طہ = - ۱۵° اور ۳۰°

## ۳،۴ :- نسبت فرق

- پچھلی دفعہ میں مف ما اور مف لا یعنی تابع متغیر اور متبوع متغیر میں محدود فرقوں کی قیمتیں حاصل کی گئی ہیں۔ اب ان فرقوں کی نسبت پر غور کرو یعنی (مف ما / مف لا) اور الفاظ میں (تابع متغیر کا فرق / متبوع متغیر کا فرق) کی قیمت حاصل کرو۔ اس نسبت (مف ما / مف لا) کا ہندسی اور طبعی مفہوم ذیل سے ظاہر ہوگا۔

فرض کرو کہ ما = ف (لا) کی ترسیم کھینچی گئی ہے اور اس پر (لا، ما) کوئی نقطہ ن ہے۔ نیز نقطہ (لا + مف لا، ما + مف ما) ق ہے۔ نقاط ن اور ق سے




لا محور پر عمود ن ل اور ق م گراؤ۔ نیز ن سے ق م پر عمود ن س کھینچو۔ تب ظاہر ہے کہ م ل = مف لا = ن س اور ق س = مف ما

اور مس ا ق ن را = مس ا ن ت ل

= مس طہ = مف ما / مف لا

یعنی الفاظ میں قاطع ق ن محور لا کے ساتھ جو زاویہ طہ بناتا ہے اس کا
مماس = مف ما / مف لا

پس مس طہ = مف ما / مف لا

اسی طرح فرض کرو کہ ایک ذرہ خطِ مستقیم میں حرکت کر رہا ہے اور طے شدہ فاصلہ اور وقت میں رشتہ ہے۔

س (فٹ) = ۲۰ ت + ۱۶ ت² جہاں وقت ت کو ثانیوں میں شمار کیا گیا ہے
اس میں ت کی کوئی قیمت چار ثانیہ درج کریں تو س = ۸۰ + ۲۵۶ = ۳۳۶ فٹ
یعنی چار ثانیوں میں طے شدہ فاصلہ ۳۳۶ فٹ ہے اور اس دوران میں اوسط رفتار
= س/ت = ۳۳۶/۴ = ۸۴ فٹ فی ثانیہ ہے۔ اب اگر ت میں ۲ ثانیوں کا
اضافہ کیا جائے تو مف ت = ۲ اور مف س = ۱۲۰ + ۵۷۶ - ۳۳۶ = ۳۶۰ فٹ

یعنی پانچویں اور چھٹے ثانیوں کی اوسط رفتار = مف س / مف ت = ۳۶۰/۲ = ۱۸۰ فٹ فی ثانیہ۔
لیکن اگر ذرہ کی رفتار بدل رہی ہو تو اوسط رفتار سے کچھ زیادہ فائدہ نہیں ہے۔
اور یہ بہتر ہوگا کہ مف ت کے وقفہ کو حتی الامکان کم کیا جائے۔ اور بجائے
اوسط رفتار کے کسی آن پر رفتار نکالنے کی کوشش کی جائے۔

اسی طرح اگر مذکورۂ بالا ہندسی مثال میں نقطہ ق کو نقطہ ن کے
قریب لایا جائے تو قاطع مماس کے قریب ہوتا جاتا ہے اور اگر انتہا میں
ق کو ن پر منطبق کر دیا جائے تو قاطع مماس ہو جاتا ہے۔

بعض سوالوں میں بالخصوص اعداد و شمار میں مف ما اور مف لا کافی بڑی
مقداریں ہوتی ہیں اور مف ما / مف لا کی نسبت سے محدود فرقوں کے احصاء کی بنیاد

قایم ہوئی ۔ لیکن جیسا کہ اوپر کی ہندسی اور طبیعی مثالوں سے ظاہر ہے بالعموم مف لا نہایت چھوٹی مقدار ہوگی اور لازماً مف ما بھی بہت چھوٹی مقدار ہوگی۔

اس لیے $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$ دو بہت چھوٹی مقداروں کی نسبت ہے اور انتہا میں اگر مف لا اور مف ما کو لا انتہا کم صغاریہ بنا دیا جائے تو $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$ کی انتہا سے صغاری احصار کی ابتداء ہوتی ہے ۔ ہندسی مثال سے ظاہر ہے اگر نقطۂ ق منحنی پر حرکت کرتے ہوئے نقطۂ ن کے اس قدر قریب آجائے کہ انتہا میں نقطۂ ن پر منطبق ہو جائے تو قاطع مماس میں تبدیل ہو جاتا ہے ۔ الجبرائی زبان میں اس ہندسی واقعہ کو یوں بیان کرینگے کہ اگر مف لا ← ۰ تو قاطع مماس بن جاتا ہے اور طہ وہ زاویہ ہوتا ہے جو انتہا میں مماس لا محور کے ساتھ بناتا ہے ۔ پس مس طہ = $\lim_{\text{مف لا} \to 0} \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$ جب کبھی یہ انتہا وجود رکھتی ہے ۔ مس طہ کو منحنی کا ڈھال بھی کہتے ہیں ۔ اس سوال کے حل کرنے کی کوشش میں لائپزگ کے ایک مشہور فلسفی گوٹ فریڈ ولہلم لائبنٹز[۵] (۱۶۴۶ء - ۱۷۱۶ء) کو اس بات کا احساس ہوا اور انہوں نے علم احصاء پر ۱۶۸۴ء میں ایک مختصر سا مضمون رسالہ (Acta Eruditorium) میں شایع کیا ۔ اس سے کچھ سال قبل طبیعی سوالوں میں شرح تبدیل اور رفتار پر غور کرتے ہوئے سر آئیزک نیوٹن (۱۶۴۲ء - ۱۷۲۷ء) پر علم احصار کا انکشاف بطور (Fluxion) کے ۱۶۶۵ء میں ہوا لیکن صاحب موصوف نے اس کو ۱۶۸۷ء تک شایع نہیں کیا ۔ بعض ریاضی دانوں نے لائبنٹز پر علمی چوری کا الزام لگایا لیکن موجودہ زمانہ میں تحقیق کنندوں کا خیال ہے کہ دونوں ریاضی دانوں نے بلا ایک دوسرے کے اثر کے علم احصاء کی مختلف نقطۂ نظر سے بنیاد ڈالی ۔ موجودہ زمانہ میں علم احصا میں مروج علامتیں لائبنٹز کی ہیں ۔

## توضیحی مثالیں

مثال ۱ :- ما = ۴ لا$^2$ کے نقطہ لا = ۲ پر $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$ کی قیمت دریافت کرو جبکہ مف لا = ± ۱، ± $\frac{1}{2}$، ± $\frac{1}{10}$، ± $\frac{1}{50}$، ± ۰٫۰۱، ± ۰٫۰۰۰۱

۵ Leibnitz

$$\text{مف ا} = ۴\,(\text{لا} + \text{مف لا})^{۲} - ۴\,\text{لا}^{۲}$$

$$= ۸\,\text{لا مف لا} + ۴\,(\text{مف لا})^{۲}$$

$$\text{اس لیے}\quad \frac{\text{مف ا}}{\text{مف لا}} = ۸\,\text{لا} + ۴\,\text{مف لا}$$

$$= ۱۶ + ۴\,\text{مف لا}\quad \text{جبکہ}\ \text{لا} = ۲$$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| مف لا | ۱ | $\frac{۱}{۲}$ | $\frac{۱}{۱۰}$ | $\frac{۱}{۵۰}$ | ۰۰۱ر | ۰۰۰۰۱ر |
| $\frac{\text{مف ا}}{\text{مف لا}}$ | ۲۰ | ۱۸ | ۱۶ر۴ | ۱۶ر۰۸ | ۱۶ر۰۰۴ | ۱۶ر۰۰۰۰۴ |
| مف لا | ۱- | $-\frac{۱}{۲}$ | $-\frac{۱}{۱۰}$ | $-\frac{۱}{۵۰}$ | ۰۰۱ر- | ۰۰۰۰۱ر- |
| $\frac{\text{مف ا}}{\text{مف لا}}$ | ۱۲+ | ۱۴+ | ۱۵ر۶ | ۱۵ر۹۲ | ۱۵ر۹۹۶ | ۱۵ر۹۹۹۹۶ |

اس سے ظاہر ہے کہ جیسے مف لا کی قیمت مثبت یا منفی جانب سے صفر کی طرف مائل ہوتی ہے $\frac{\text{مف ا}}{\text{مف لا}}$ کی قیمت ۱۶ کی طرف مائل ہوتی ہے۔

مثال ۲:- $\text{ا} = \frac{۱}{\text{لا} + ۳}$ میں $\frac{\text{مف ا}}{\text{مف لا}}$ کی قیمت دریافت کرو جبکہ لا = ۱- اور مف لا = ± ۱ر، ± ۰۰۱ر اور ± ۰۰۰۰۱ر

$$\text{مف ا} = \frac{۱}{\text{لا} + \text{مف لا} + ۳} - \frac{۱}{\text{لا} + ۳}$$

$$= \frac{(\text{لا}+۳) - (\text{لا}+۳+\text{مف لا})}{(\text{لا}+۳)(\text{لا}+۳+\text{مف لا})} = \frac{-\text{مف لا}}{(\text{لا}+۳)^{۲} + \text{مف لا}\,(\text{لا}+۳)}$$

$$\text{اس لیے}\quad \frac{\text{مف ا}}{\text{مف لا}} = -\frac{۱}{(\text{لا}+۳)^{۲} + \text{مف لا}\,(\text{لا}+۳)} = \frac{-۱}{(\text{لا}+۳)^{۲}}\left(۱ + \frac{\text{مف لا}}{\text{لا}+۳}\right)^{-۱}$$

$$= -\frac{۱}{۴}\left(۱ + \frac{\text{مف لا}}{۲}\right)^{-۱}\ \text{جبکہ مف لا} = ۱-$$

| معف لا | ۱+ | ۰٫۰۰۱ | ۰٫۰۰۰۰۰۱ | ۱- | ۰٫۰۰۱- | ۰٫۰۰۰۰۰۱- |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\text{معف ا}}{\text{معف لا}}$ | $\frac{۱}{۶}$ | $\frac{۱}{۴٫۰۰۲}$ | $\frac{۱}{۴٫۰۰۰۰۰۲}$ | $\frac{۱}{۲}$ | $\frac{۱}{۳٫۹۹۹۸}$ | $\frac{۱}{۳٫۹۹۹۹۹۸}$ |

اس سے ظاہر ہے کہ $\frac{\text{معف ا}}{\text{معف لا}}$ کی قیمت $\frac{۱}{۴}$ کی طرف مائل ہوتی ہے جیسے معف لا صفر کی طرف مثبت یا منفی جانب سے مائل ہوتا ہے۔

# مشقی سوالات ۹

(۱) ذیل کے تفاعلوں میں $\frac{\text{معف ا}}{\text{معف لا}}$ کی قیمت دریافت کرو:—

(ا) ا = ۴ لا$^{۲}$ جبکہ لا = ۱ اور معف لا = ±۱، ±$\frac{۱}{۲}$، ±$\frac{۱}{۱۰}$، ±$\frac{۱}{۱۰۰۰}$

(ب) ا = (۲ لا + ۳)$^{۲}$ جبکہ لا = ۲- اور معف لا = ±$\frac{۳}{۲}$، ±$\frac{۵}{۴}$، ±$\frac{۱}{۱۰۰۰۰۰}$

(ج) ا = جب لا جبکہ لا = $\frac{\pi}{۲}$ اور معف ا = ±$\frac{\pi}{۹۰}$، ±$\frac{\pi}{۱۸۰}$، ±$\frac{\pi}{۳۶۰}$

(د) ا = مس لا جبکہ لا = $\frac{\pi}{۴}$ اور معف لا = ±$\frac{\pi}{۳۶۰}$، ±$\frac{\pi}{۵۴۰}$

(ہ) ا = $\frac{۵ لا + ۳}{۲ لا + ۴}$ جبکہ لا = $\frac{۳}{۵}$ اور معف ا = ±$\frac{۱}{۱۰۰۰}$، ±$\frac{۲}{۱۰۰۰۰۰۰}$

(و) ا = $\frac{۱}{(۲ لا + ۳)^{۲}}$ جبکہ لا = ۲ اور معف لا = $\frac{۱}{۱۰}$

(۲) ذیل کے تفاعلوں میں معف لا کی مناسب چھوٹی قیمتیں لے کر بتاؤ کہ $\frac{\text{معف ا}}{\text{معف لا}}$ کی انتہا کیا ہے:

(ا) ا = ۲ لا$^{۳}$ + ۳ لا$^{۲}$ جبکہ لا = ۲

(ب) ا = (۳ لا - ۲)$^{۴}$ جبکہ لا = $\frac{۲}{۳}$

(ج) ما = ۱/(۲لا − ۱) جبکہ لا = ۱

(د) ما = جب ۲لا جبکہ لا = ط/۶

### ۴،۳:۔ تفرقی سر — مف ما/مف لا یعنی [ف (لا + مف لا) − ف (لا)]/مف لا

کی انتہا جبکہ مف لا مثبت یا منفی جانب سے صفر کی طرف مائل ہو بالعموم مسلسل تفاعلوں کے لیے وجود رکھتی ہے۔ اگرچہ ایسی خاص مثالیں بنائی جاسکتی ہیں کہ مسلسل تفاعل کے کسی خاص نقطہ پر یا تمام نقطوں پر یہ انتہا وجود نہ رکھے۔

نہا (مف لا ← ۰±) مف ما/مف لا یا مف [ف (لا)]/مف لا یا [ف (لا + مف لا) − ف (لا)]/مف ل

یا (تابع متغیر کا فرق)/(متبوع متغیر کا فرق) کے، فر ما/فر لا یا فر [ف (لا)]/فر لا یا فَ (لا) سے تعبیر کیا جاتا ہے اور اس کو ما یا ف (لا) یا تابع متغیر کا بلحاظ لا یعنی متبوع متغیر کے تفرقی سر یا مشتق تفاعل کہتے ہیں۔ انتہا سے پہلے مف ما/مف لا ایک نسبت ہے اور مف ما اور مف لا علیحدہ علیحدہ وجود رکھتے ہیں لیکن انتہا کے بعد فر ما/فر لا نسبت نہیں ہے بلکہ ایک معین مقدار ہے۔ آئندہ فر ما اور فر لا کی بھی تعریف بطور صغاریوں کے حصہ رحصہ کے کی جائیگی لیکن فی الوقت فر ما اور فر لا کے کوئی معنی نہیں ہیں اس لیے فر ما/فر لا کو ایک واحد چیز تصور کرنا چاہیے۔ یعنی فر/فر لا تفاعل ما پر ایک عمل کا نتیجہ ہے اور یہ عمل فر/فر لا سے تعبیر ہو سکتا ہے۔ اس بات پر زور دینے کے لیے فر/فر لا کے عمل کو عف یا عف لا سے بھی تعبیر کرتے ہیں۔

پس تفرقی سر ہوگا عف ما یا عف لا ما یا عف [ف (لا)]

## توضیحی مثالیں

مثال (۱)۔ ما = ۴ لا۲ کا تفرقی سر کسی نقطہ پر دریافت کرو۔

مف ا = ۴ (لا + مف لا)۲ - ۴ لا۲ = ۸ لا مف لا + ۴ (مف لا)۲

∴ مف ا / مف لا = ۸ لا + ۴ مف لا

∴ فر ا / فر لا = نہا (مف لا ← ۰) مف ا / مف لا = نہا (مف لا ← ۰) [۸ لا + ۴ مف لا] = ۸ لا

اس لیے ۸ لا کسی نقطہ لا پر ۴ لا۲ کا تفرقی سر ہے۔

مثال (۲) ا = ۳ (لا۲ + ۵ لا)۳ کا تفرقی سر دریافت کرو

مف ا = ۳ [(لا + مف لا)۲ + ۵ (لا + مف لا)]۳ - ۳ (لا۲ + ۵ لا)۳

= ۳ [(لا۲ + ۵ لا) + مف لا (۲ لا + ۵ + مف لا)]۳ - ۳ (لا۲ + ۵ لا)۳

= ۹ (لا۲ + ۵ لا)۲ مف لا (۲ لا + ۵ + مف لا) + ۹ (لا۲ + ۵ لا) (مف لا)۲ (۲ لا + ۵ + مف لا)۲ + (مف لا)۳ (۲ لا + ۵ + مف لا)۳

مف ا / مف لا = ۹ (لا۲ + ۵ لا)۲ (۲ لا + ۵) + ۹ مف لا (لا۲ + ۵ لا) (۲ لا + ۵)
+ ۹ مف لا (لا۲ + ۵ لا) (۲ لا + ۵ + مف لا) + (مف لا)۲ (۲ لا + ۵ + مف لا)۳

اس لیے فر ا / فر لا = نہا (مف لا ← ۰) مف ا / مف لا = ۹ (لا۲ + ۵ لا)۲ (۲ لا + ۵) + ۰ + ۰ + ۰

= ۹ (لا۲ + ۵ لا)۲ (۲ لا + ۵)

مثال (۳) لا = جب ط کا تفرقی سر فر لا / فر ط دریافت کرو۔

مف لا = جب (ط + مف ط) - جب ط = ۲ جم (ط + مف ط/۲) جب مف ط/۲

مف لا / مف ط = ۲ جم (ط + مف ط/۲) جب (مف ط/۲) / مف ط = جم (ط + مف ط/۲) · جب (مف ط/۲) / (مف ط/۲)

∴ فر لا / فر ط = نہا (مف ط ← ۰) مف لا / مف ط = نہا (مف ط ← ۰) جم (ط + مف ط/۲) · جب (مف ط/۲) / (مف ط/۲)

= جم ط چونکہ نہا (مف ط ← ۰) جب (مف ط/۲) / (مف ط/۲) ← ۱ (دیکھو باب اول)

# مشقی سوالات ۱۰

ذیل کے تفاعلوں کو تفرق کرو :

(۱) ما = ۲لا (۲) ما = ۳لا$^{۲}$ (۳) ما = لا$^{۳}$

(۴) ما = لا$^{۲}$ + ۲لا + ۳ (۵) ما = لا$^{۳}$ - ۳لا - ۵ (۶) ما = ۳-۲لا

(۷) ما = ۱-۳لا$^{۲}$ (۸) ما = $\frac{۱}{لا}$ (۹) ما = ۲ - $\frac{۳}{لا^{۳}}$

(۱۰) ما = $\frac{۲لا+۳}{۳لا-۴}$ (۱۱) لا = جب ۲ طہ (۱۲) لا = جم ۳ طہ

(۱۳) لا = مس طہ (۱۴) لا = قط ۲ طہ

(۱۵) ما = ا لا$^{۲}$ + ب لا + ج -

**۳ء۵ - تکمل** :- مذکورۂ بالا دفعہ میں تفرق کرنا بتایا گیا ہے یعنی کوئی تفاعل دیا گیا ہے اور طالب علم نے اس کا تفرقی سر دریافت کیا ہے بعض سوالوں میں تفرقی سر کی قیمت دی ہوئی ہوتی ہے اور اس سے اصل تفاعل کی قیمت دریافت کرنی پڑتی ہے یعنی اگر $\frac{فر}{فرلا}$ [ ف (لا) ] کی قیمت معلوم ہو تو ف (لا) کی قیمت کیا ہوگی - مثلاً $\frac{لا^{۲}}{۲}$ کا تفرقی سر لا ہے اور برعکس اس کے لا تفرقی سر ہو تو تفاعل $\frac{لا^{۲}}{۲}$ ہوگا - تفرق کے اس مقلوب عمل کو "تکمل کا عمل" کہتے ہیں - پس ف (لا) کا تفرقی سر $\frac{فر}{فرلا}$ [ ف (لا) ] یا فً (لا) ہوگا اور فً (لا) تکملہ بلحاظ لا کے تفاعل ف (لا) ہوگا - علامتوں میں اس بات کو یوں ظاہر کرتے ہیں کہ $\int$ فً (لا) فرلا یعنی فً (لا) کا تکملہ بلحاظ لا کے ف (لا) ہے

$$\therefore \int فً (لا) فرلا = ف (لا)$$

اعلیٰ ریاضی میں تکملہ کی تعریف ریمان لیبگ وغیرہ کے مطابق ایک لا متناہی سلسلہ کے مجموعہ سے کی جاتی ہے لیکن طالب علم کی موجودہ استعداد کے لیے مناسب ہے کہ تکمل کی تعریف محض تفرق کے مقلوب عمل کی طرح کی جائے تفرق کی مثالوں میں بتایا گیا ہے کہ ایک مستقل کا تفرقی سر صفر ہے

یعنی ف (لا) + مستقل کا تفرقی سر فَ (لا) ہے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}} \left[ \text{ف (لا)} + \text{مستقل} \right] = \text{فَ (لا)}$$

اس لیے مقلوب عمل کرنے سے حاصل ہوگا ∫ فَ (لا) فرلا = ف (لا) + م
جہاں م کوئی مستقل ہے۔ اس سے ظاہر ہے کہ تفرق کے عمل سے واحد نتیجہ ملتا ہے لیکن تکمل کے عمل کے بعد حاصل تکمل میں ایک اختیاری مستقل موجود ہے اور اکثر سوالوں میں اس مستقل کی قیمت ابتدائی شرائط سے دریافت کی جاتی ہے اس مستقل کی موجودگی کی وجہ سے اس تکمل کو غیر معین تکملہ بھی کہتے ہیں۔

# توضیحی مثالیں

مثال (۱) ∫ لا فرلا کی قیمت دریافت کرو
ہمیں معلوم ہے کہ لا۲ کا تفرقی سر ۲ لا ہے اس لیے $\frac{\text{لا}^2}{2}$ کا تفرقی سر لا ہوگا۔

پس ∫ لا فرلا = $\frac{\text{لا}^2}{2}$ + م

مثال (۲) ∫ جم ۲لا فرلا کی قیمت دریافت کرو۔
ہمیں گزشتہ دفعہ کی مثالوں سے معلوم ہے کہ جب ۲لا کا تفرقی سر بلحاظ لا کے ۲جم ۲لا ہے

اس لیے ∫ جم ۲لا فرلا = $\frac{\text{جب ۲لا}}{2}$ + م

# مشقی سوالات ۱۱

ذیل کی قیمت دریافت کرو:

(۱) ∫ لا۳ فرلا (۲) ∫ (۳لا + ۲) فرلا (۳) ∫ (۳لا۲ − ۳لا) فرلا
(۴) ∫ (لا۲ − لا − ۱) فرلا (۵) ∫ جب لا فرلا (۶) ∫ جم لا فرلا

(۷) $\int \frac{1}{\text{تجم}\ ۲\ \text{لا}}\ \text{فرلا}$　　(۸) $\int \frac{1}{\text{قطع}\ ۳\ \text{لا}}\ \text{فرلا}$　　(۹) $\int \left(۲ - \frac{۳}{\text{لا}^{۴}}\right) \text{فرلا}$

(۱۰) $\int \left(۳\ \text{لا} + \frac{۴}{\text{لا}^{۳}} - ۱\right) \text{فرلا}$　　(۱۱) $\int \left(\text{جب}\ ۲\ \text{لا} - \text{جم}\ ۳\ \text{لا}\right) \text{فرلا}$

## ۳٫۶ ۔ تفرق اور تکمل کی معیاری شکلیں :-

دفعہ ۳٫۳ میں ابتدائی اصولوں سے تفرق کرنا بتایا گیا ہے ۔ لیکن ہر سوال میں اس عمل کے کرنے میں بہت طول ہوگا اور اس لیے چند ایسے تفاعلوں کا جو اکثر استعمال ہوتے ہیں ابتدائی اصولوں سے تفرقی سر نکال لیا جاتا ہے ۔ اور ان نتیجوں کو باقی سوالوں میں تفرقی سر نکالنے کے لیے بطور ضابطے کے استعمال کیا جاتا ہے ۔ موجودہ تعریف کے مطابق تکمل کا عمل مقلوب عمل ہے اور اس لیے ابتدائی اصولوں سے تکمل نہیں نکالا جا سکتا ۔ اس میں بہت ضروری ہے کہ چند اہم صورتوں میں تکمل کی قیمت نکال لی جائے اور انہیں بطور معیاری شکلوں کے استعمال کیا جائے ۔ اب ہم تفرق اور ساتھ ساتھ تکمل کی چند معیاری شکلیں حاصل کرینگے ۔

**۳٫۶۱ :-** $\text{ما} = \text{لا}^{\text{ن}}$ جہاں ن مثبت صحیح عدد ہے ۔

$$\text{مف ما} = (\text{لا} + \text{مف لا})^{\text{ن}} - \text{لا}^{\text{ن}}$$

اسے مسئلہ ثنائی سے پھیلاؤ

$$= \text{ن} \times \text{لا}^{\text{ن}-۱} \times \text{مف لا} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{\lfloor ۲} \text{لا}^{\text{ن}-۲} (\text{مف لا})^{۲} + \ldots + (\text{مف لا})^{\text{ن}}$$

$$\therefore \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \text{ن}\ \text{لا}^{\text{ن}-۱} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{\lfloor ۲} \text{لا}^{\text{ن}-۲}\ \text{مف لا} + \ldots + (\text{مف لا})^{\text{ن}-۱}$$

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \underset{\text{مف لا} \to ۰}{\text{نہا}} \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \underset{\text{مف لا} \to ۰}{\text{نہا}} \left[\text{ن}\ \text{لا}^{\text{ن}-۱} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{\lfloor ۲} \text{لا}^{\text{ن}-۲}\ \text{مف لا} + \ldots + (\text{مف لا})^{\text{ن}-۱}\right]$$

$$= \text{ن}\ \text{لا}^{\text{ن}-۱}$$

یہ ضابطہ ن کی کسری یا منفی قیمت کے لیے بھی درست ہے جس کا ثبوت دفعہ ۲٫۴۲ کے نتیجہ صریح سے فوراً حاصل ہوتا ہے اگر ہم ھ کی بجائے مف لا درج کریں ۔

اب ہم تین ذیلی ضابطے بیان کرتے ہیں جن کا ثبوت بہت آسان ہے اور طالب علم کے لیے بطور مشق کے چھوڑ دیتے ہیں۔

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}(\text{مستقل}) = \cdot$$

اور $\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left[\text{م ف(لا)}\right] = \text{م}\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left[\text{ف(لا)}\right] = \text{م ف}'\text{(لا)}$

اور $\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left[\text{ف}_{۱}\text{(لا)} + \text{ف}_{۲}\text{(لا)} + \ldots\right] = \frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left[\text{ف}_{۱}\text{(لا)}\right] + \frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left[\text{ف}_{۲}\text{(لا)}\right] + \ldots$

یہ ضابطے سوالات میں بہت استعمال ہونگے۔

اسی طرح $\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}(\text{لا}^{\text{ن}+۱}) = (\text{ن}+۱)\,\text{لا}^{\text{ن}}$ یعنی $\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left[\frac{\text{لا}^{\text{ن}+۱}}{\text{ن}+۱}\right] = \text{لا}^{\text{ن}}$

اور مقلوب عمل سے $\int \text{لا}^{\text{ن}}\,\text{فرلا} = \frac{\text{لا}^{\text{ن}+۱}}{\text{ن}+۱} + \text{مستقل}$

اگر ن = -۱ تو یہ ضابطہ درست نہیں رہتا کیونکہ $\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left(\frac{\text{لا}^{\cdot}}{\cdot}\right)$ کے کوئی معنی نہیں ہیں۔ $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}}$ کی قیمت بعد میں نکالی جائیگی۔

نیز ذیلی ضابطوں کے مقلوب عمل سے حاصل ہوگا $\int \text{م ف(لا) فرلا} = \text{م}\int \text{ف(لا) فرلا}$

اور $\int\left[\text{ف}_{۱}\text{(لا)} + \text{ف}_{۲}\text{(لا)} + \ldots\right]\text{فرلا} = \int \text{ف}_{۱}\text{(لا) فرلا} + \int \text{ف}_{۲}\text{(لا) فرلا} + \ldots$

## مشقی سوالات ۱۲

ذیل کے تفاعلوں کو تفرق کرو۔ ضابطوں کا استعمال کیا جائے۔

(۱) $۲\text{لا} + ۳$ (۲) $۲\text{لا}^{۲} + ۳\text{لا} - ۵$ (۳) $۳\text{لا} - ۵\text{لا}^{۲} + \frac{۵}{\text{لا}}$

(۴) $۵\text{ص}^{۲} + \frac{۶}{\text{ص}^{۳}}$ (۵) $\text{ی}^{۵} - ۵۰\text{ی}$ (۶) $\text{ا لا}^{۲} + ۲\text{ب لا} + \text{ج}$

(۷) $۳\text{لا}^{\frac{۲}{۳}} + ۲\text{لا}^{\frac{۳}{۲}}$ (۸) $۵\sqrt{۲\text{لا}^{۲}}$ (۹) $۴\sqrt{\text{لا}^{\frac{۲}{۳}}}$

(۱۰) $\frac{3}{\sqrt[4]{\text{لا}^2}}$ (۱۱) $5\,\text{ما}^{\frac{1}{2}} + 6$ (۱۲) $\frac{\text{ا} + \text{ب}\,\text{ت} + \text{ج}\,\text{ت}^2}{\sqrt{\text{ت}}}$

(۱۳) $12\,\text{ی}^{\frac{3}{4}} + 6 + 12\,\text{ی}^{\frac{2}{3}}$ (۱۴) $\frac{\text{ا} + \text{ب}\,\text{ت} + \text{ج}\,\text{ت}^2}{\text{ت}^3}$

ذیل کے تفاعلوں کے تکملے ضابطے کی مدد سے لکھو:-

(۱۵) $\int 5\,\text{لا}^2\,\text{فلا}$ (۱۶) $\int (3\,\text{لا} + 5\,\text{لا}^3 - 7)\,\text{فلا}$ (۱۷) $\int \left(2\,\text{لا}^3 - \frac{1}{\text{لا}^2}\right)\text{فلا}$

(۱۸) $\int (\text{ص} + 2)^2\,\text{فص}$ (۱۹) $\int \left(2\,\text{ی} + \frac{3}{\text{ی}^2}\right)\text{فی}$

(۲۰) $\int (\text{الا} + \text{ب})^3\,\text{فلا}$ (۲۱) $\int \sqrt[5]{2\,\text{لا}^2}\;\text{فلا}$

(۲۲) $\int \left(4\,\text{لا}^{\frac{3}{4}} + 5\,\text{لا}^{\frac{4}{3}}\right)\text{فلا}$ (۲۳) $\int \sqrt{\text{ت}^{\frac{2}{3}}}\;\text{فت}$

(۲۴) $\int \frac{\text{ا} + \text{ب}\,\text{ت} + \text{ج}\,\text{ت}^2}{\sqrt{\text{ت}}}\,\text{فت}$ (۲۵) $\int \left(4\,\text{ی}^{\frac{3}{4}} - 3 + 7\,\text{ی}^{\frac{3}{4}}\right)\text{فی}$

(۲۶) $\int \frac{\text{فو}}{\sqrt[5]{3\,\text{و}^{\frac{4}{3}}}}$

## ۳،۶۲:- تفاعل کا تفاعل

:- فرض کرو کہ $\text{ما} = \text{فہ}(\text{و})$ جہاں $\text{و} = \text{ف}(\text{لا})$ اور ما کا تفرقی سر بلحاظ لا کے مطلوب ہے۔ ایک طریقہ تو یہ ہوگا کہ و کی قیمت ف (لا) کو فہ (و) میں درج کردیا جائے۔ اس طرح ما بلا راست لا کا تفاعل ہوجاتا ہے اور اس کو تفرق کرنے سے $\frac{\text{فما}}{\text{فلا}}$ حاصل ہوجائیگا۔ لیکن اکثر سوالات میں یہ عمل مشکل ہوگا اور اس لیے ما کا تفرقی سر بلحاظ لا کے بتوسط و دریافت کیا جائیگا۔

$$\text{ما} + \text{مف ما} = \text{فہ}(\text{و} + \text{مف و}) \qquad \text{اور} \qquad \text{و} + \text{مف و} = \text{ف}(\text{لا} + \text{مف لا})$$

$$\text{اب}\ \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{فہ}(\text{و} + \text{مف و}) - \text{فہ}(\text{و})}{\text{مف لا}} = \frac{\text{فہ}(\text{و} + \text{مف و}) - \text{فہ}(\text{و})}{\text{مف و}} \times \frac{\text{مف و}}{\text{مف لا}}$$

$$= \frac{\text{فہ}(\text{و} + \text{مف و}) - \text{فہ}(\text{و})}{\text{مف و}} \times \frac{\text{ف}(\text{لا} + \text{مف لا}) - \text{ف}(\text{لا})}{\text{مف لا}}$$

انتہا کے باب میں ثابت کیا گیا ہے کہ حاصل ضرب کی انتہا اجزا کی انتہاؤں کے

حاصل ضرب کے مساوی ہوتی ہے ۔

$$\text{اس لیے}\quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \underset{\text{مف لا} \to \cdot}{\text{نہا}} \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$$

$$= \underset{\text{مف لا} \to \cdot}{\text{نہا}} \frac{\text{فہ (و + مف و) - فہ (و)}}{\text{مف و}} \times \underset{\text{مف لا} \to \cdot}{\text{نہا}} \frac{\text{ف (لا + مف لا) - ف (لا)}}{\text{مف لا}}$$

اب اگر مف لا ← ۰ تو لازمی طور پر مف و ← ۰ ۔

$$\text{اس لیے}\quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر}}{\text{فر و}}\left[\text{فہ (و)}\right] \times \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\left[\text{ف (لا)}\right] = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر و}} \times \frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}}$$

اسی طرح اگر $\text{ما} = \text{ف (و)}$ اور $\text{و} = \text{فہ (ی)}$ اور $\text{ی} = \text{فا (لا)}$

$$\text{تو}\quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر و}} \times \frac{\text{فر و}}{\text{فر ی}} \times \frac{\text{فر ی}}{\text{فر لا}}$$

تکمل کی صورت میں $\int \text{ف (و)} \frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}} \text{فر لا} = \int \text{ف (و) فر و}$

# توضیحی مثالیں

مثال (۱) $\text{ما} = (\text{۴ لا}^{۳} + \text{۳ لا} - ۵)^{۴}$ سے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی قیمت دریافت کرو۔

اس میں بائیں جانب کے جملہ کو پھیلایا جا سکتا ہے اور پھر پہلی معیاری شکل سے تفرق کیا جا سکتا ہے۔ لیکن ظاہر ہے کہ یہ طریقہ بہت لمبا ہے۔ اس لیے فرض کرو کہ $\text{۴ لا}^{۳} + \text{۳ لا} - ۵ = \text{ص}$

پس $\text{ما} = \text{ص}^{۴}$ اور $\text{ص} = \text{۴ لا}^{۳} + \text{۳ لا} - ۵$

$$\text{اور}\quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر ص}} \times \frac{\text{فر ص}}{\text{فر لا}} = \text{۴ ص}^{۳} \times (\text{۱۲ لا}^{۲} + ۳)$$

$$= ۴\,(\text{۴ لا}^{۳} + \text{۳ لا} - ۵)^{۳}\,(\text{۱۲ لا}^{۲} + ۳)$$

مثال (۲) $\int \text{۲ لا}\,(\text{لا}^{۲} + ۵)^{۴}\,\text{فر لا}$ کی قیمت دریافت کرو۔

اس تکمل میں بھی تکملہ $۲\text{لا}\,(\text{لا}^{۲}+۵)^{۴}$ کو لا کی قوتوں میں پھیلایا جاسکتا ہے۔ اور پھر ضابطہ سے تکمل کیا جا سکتا ہے۔ لیکن اس دفعہ کے استعمال سے عمل میں بہت سہولت ہوگی۔

فرض کرو کہ $\text{لا}^{۲}+۵=\text{ص}$ اس لیے $\frac{\text{فص}}{\text{فلا}}=۲\text{لا}$

$$\int ۲\text{لا}\,(\text{لا}^{۲}+۵)^{۴}\,\text{فلا}=\int \text{ص}^{۴}\,\frac{\text{فص}}{\text{فلا}}\,\text{فلا}=\int \text{ص}^{۴}\,\text{فص}=\frac{\text{ص}^{۵}}{۵}+\text{مستقل}$$

$$=\frac{۱}{۵}(\text{لا}^{۲}+۵)^{۵}+\text{مستقل}$$

# مشقی سوالات ۱۳

ذیل کے تفاعلوں کے تفرقی سر دریافت کرو :—

(۱) $(۲\text{لا}+۱)^{۳}$　(۲) $(\text{لا}^{۲}+۳\text{لا}+۵)^{۳}$　(۳) $(۲\text{لا}^{۳}-۳\text{لا}+۷)^{۲}$

(۴) $(۵\text{ی}^{۲}-۳\text{ی}-۲)^{۲}$　(۵) $(\text{ط}^{۳}-۲\text{ط})^{۲}$　(۶) $(۳\text{لا}-۱)^{۳}-\frac{۴}{(\text{لا}+۷)^{۳}}$

(۷) $(۲\text{ی}-۱)^{-۳}$　(۸) $\frac{۵}{(\text{لا}^{۲}-۳\text{لا}-۳)^{۳}}$　(۹) $(۵\text{لا}^{۲}-۲)^{۵}+\frac{۴}{(۲\text{لا}^{۲}+۴\text{لا}-۳)^{۷}}$

(۱۰) $\text{ما}=۵\text{و}^{۲}-۳\text{و}+۱$ اور $\text{و}=(۲\text{لا}-۱)^{۳}$

(۱۱) $\text{ما}=۳\text{ص}^{۲}+۲\text{ص}-\frac{۱}{\text{ص}}$ اور $\text{ص}=۲\text{لا}-\frac{۱}{(\text{لا}^{۲}+۵)^{۳}}$

(۱۲) $\text{لا}\times\sqrt[۳]{۲-\text{لا}}$　(۱۳) $\sqrt[۳]{۲\text{لا}^{۲}+۵}\;\sqrt[۴]{\text{لا}^{۲}+۵}$　(۱۴) $\sqrt{۱۰-۲\text{لا}}$

(۱۵) $\sqrt[۳]{\text{لا}^{۲}-۲\text{لا}+۳}$　(۱۶) $\text{ت}^{۲}\sqrt[۳]{۲\text{ت}-۱}$

ذیل کے تکملوں کی قیمت دریافت کرو :—

(۱۷) $\int(۲\text{لا}-۱)^{۳}\,\text{فلا}$　(۱۸) $\int(۴\text{لا}+۳)^{۲}\,\text{فلا}$　(۱۹) $\int(۳\text{لا}-۲)^{۲}\,\text{فلا}$

(۳۰) $\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{۵لا}+۱)^{۳}}$     (۲۱) $\int \left[\text{۲لا}+۳-\frac{۴}{(\text{لا}+۱)^{۲}}\right]$ فرلا

(۲۲) $\int \left[\text{۸لا}^{۳}-\text{۷لا}+۱+\frac{۲}{(\text{۳لا}-۱)^{۲}}+\frac{۴}{\text{لا}^{۲}}\right]$ فرلا

(۲۳) $\int (\text{۴لا}^{۳}-\text{۷لا}+؛)^{۴}(\text{۱۲لا}^{۲}-۷)$ فرلا

(۲۴) $\int (\text{۵لا}^{۲}-\text{۴لا}+۲)^{۳}(\text{۵لا}-۲)$ فرلا

(۲۵) $\int \sqrt[۳]{۲-\text{لا}}$ فرلا     (۲۶) $\int (\text{لا}^{\frac{۲}{۳}}-\text{لا}^{\frac{۴}{۳}})$ فرلا

(۲۷) $\int (\text{۶و}-۱)^{\frac{۱}{۳}}$ فرو     (۲۸) $\int \sqrt[۵]{۴-\text{۳ت}}$ فرت

## ۳٫۶۳۔ مثلثی تفاعلوں کا تفرقی سر:۔

### (۱) جب لا کا تفرقی سر:۔

فرض کرو کہ ما = جب لا

تو مف ما = جب (لا + مف لا) ۔ جب لا

$= ۲\ \text{جم}\ \frac{\text{۲لا}+\text{مف لا}}{۲}\ \text{جب}\ \frac{\text{مف لا}}{۲}$

$\therefore \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{جم}\left(\text{لا}+\frac{\text{مف لا}}{۲}\right)\ \text{جب}\ \frac{\text{مف لا}}{۲}}{\frac{\text{مف لا}}{۲}}$

اور $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{نہا}_{\text{مف لا}\to ۰} \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \text{نہا}_{\text{مف لا}\to ۰}\ \text{جم}\left(\text{لا}+\frac{\text{مف لا}}{۲}\right)\frac{\text{جب}\frac{\text{مف لا}}{۲}}{\frac{\text{مف لا}}{۲}}$

$= \text{نہا}_{\text{مف لا}\to ۰}\ \text{جم}\left(\text{لا}+\frac{\text{مف لا}}{۲}\right) \times \text{نہا}_{\text{مف لا}\to ۰}\frac{\text{جب}\frac{\text{مف لا}}{۲}}{\frac{\text{مف لا}}{۲}}$

= جم لا

مقلوب عمل سے $\int$ جم لا فرلا = جب لا + مستقل

(ب) جم لا کا تفرقی سر:۔

$$\text{ما} = \text{جم لا} \quad \text{تو مف ما} = \text{جم}(\text{لا} + \text{مف لا}) - \text{جم لا}$$

$$= ۲\,\text{جب}\left(\text{لا} + \frac{\text{مف لا}}{۲}\right)\text{جب}\left(-\frac{\text{مف لا}}{۲}\right)$$

$$= -۲\,\text{جب}\left(\text{لا} + \frac{\text{مف لا}}{۲}\right)\text{جب}\,\frac{\text{مف لا}}{۲}$$

$$\therefore \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \underset{\text{مف لا}\to ۰}{\text{نہا}}\ \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \underset{\text{مف لا}\to ۰}{\text{نہا}}\left[-\frac{\text{جب}\left(\text{لا}+\frac{\text{مف لا}}{۲}\right)\text{جب}\frac{\text{مف لا}}{۲}}{\frac{\text{مف لا}}{۲}}\right]$$

$$= -\,\text{جب لا}$$

$$\text{اور مقلوب عمل سے} \quad \int \text{جب لا فر لا} = -\text{جم لا} + \text{مستقل}$$

(ج) مس لا کا تفرقی سر:۔

$$\text{فرض کرو ما} = \text{مس لا}$$

$$\text{تو مف ما} = \text{مس}(\text{لا} + \text{مف لا}) - \text{مس لا}$$

$$= \frac{\text{جب}(\text{لا}+\text{مف لا})}{\text{جم}(\text{لا}+\text{مف لا})} - \frac{\text{جب لا}}{\text{جم لا}}$$

$$= \frac{\text{جب}(\text{لا}+\text{مف لا})\,\text{جم لا} - \text{جم}(\text{لا}+\text{مف لا})\,\text{جب لا}}{\text{جم لا}\,\text{جم}(\text{لا}+\text{مف لا})} = \frac{\text{جب مف لا}}{\text{جم لا}\,\text{جم}(\text{لا}+\text{مف لا})}$$

$$\therefore \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \underset{\text{مف لا}\to ۰}{\text{نہا}}\ \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \underset{\text{مف لا}\to ۰}{\text{نہا}}\ \frac{\text{جب مف لا}}{\text{مف لا}} \times \frac{۱}{\text{جم لا}} \times \frac{۱}{\text{جم}(\text{لا}+\text{مف لا})}$$

$$= \frac{۱}{\text{جم لا} \times \text{جم لا}} = \text{قط}^{۲}\,\text{لا}$$

$$\text{مقلوب عمل سے} \int \text{قط}^{۲}\,\text{لا فر لا} = \text{مس لا} + \text{مستقل}$$

(د) حم لا کا تفرقی سر:۔

$$\text{فرض کرو کہ ما} = \text{حم لا}$$

$$\text{تو}\quad \text{معف ما} = \text{حم}\,(\text{لا} + \text{معف لا}) - \text{حم لا}$$

$$= \frac{\text{جم}\,(\text{لا} + \text{معف لا})\,\text{جب لا} - \text{جم لا جب}\,(\text{لا} + \text{معف لا})}{\text{جب}\,(\text{لا} + \text{معف لا})\,\text{جب لا}}$$

$$= \frac{\text{جب}\,(-\text{معف لا})}{\text{جب لا جب}\,(\text{لا} + \text{معف لا})} = \frac{-\,\text{جب معف لا}}{\text{جب لا جب}\,(\text{لا} + \text{معف لا})}$$

$$\therefore \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{نہا}_{\text{معف لا}\to ۰}\frac{\text{معف ما}}{\text{معف لا}} = \text{نہا}_{\text{معف لا}\to ۰}\frac{-\,\text{جب معف لا}}{\text{معف لا}} \times \frac{1}{\text{جب لا}} \times \frac{1}{\text{جب}\,(\text{لا} + \text{معف لا})}$$

$$= -\frac{1}{\text{جب}^2\,\text{لا}} = -\,\text{قم}^2\,\text{لا}$$

$$\text{مقلوب عمل سے}\ \int \text{قم}^2\,\text{لا فر لا} = -\,\text{حم لا} + \text{مستقل}$$

## (ھ) قط لا کا تفرقی سر:-

$$\text{ما} = \text{قط لا}$$

$$\text{تو معف ما} = \text{قط}\,(\text{لا} + \text{معف لا}) - \text{قط لا}$$

$$= \frac{\text{جم لا} - \text{جم}\,(\text{لا} + \text{معف لا})}{\text{جم لا جم}\,(\text{لا} + \text{معف لا})} = \frac{۲\,\text{جب}\,(\text{لا} + \frac{\text{معف لا}}{۲})\,\text{جب}\,\frac{\text{معف لا}}{۲}}{\text{جم لا جم}\,(\text{لا} + \text{معف لا})}$$

$$\therefore \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{نہا}_{\text{معف لا}\to ۰}\frac{\text{معف ما}}{\text{معف لا}} = \text{نہا}_{\text{معف لا}\to ۰}\frac{\text{جب}\,\frac{\text{معف لا}}{۲}}{\frac{\text{معف لا}}{۲}} \times \frac{\text{جب}\,(\text{لا} + \frac{\text{معف لا}}{۲})}{\text{جم لا جم}\,(\text{لا} + \text{معف لا})}$$

$$= \frac{\text{جب لا}}{\text{جم}^2\,\text{لا}} = \text{مس لا قط لا}$$

$$\text{اور مقلوب عمل سے}\ \int \text{مس لا قط لا فر لا} = \text{قط لا} + \text{مستقل}$$

## (و) قم لا کا تفرقی سر:-

$$\text{ما} = \text{قم لا}$$

$$\text{تو معف ما} = \text{قم}\,(\text{لا} + \text{معف لا}) - \text{قم لا}$$

$$= \frac{\text{جب لا} - \text{جب}\,(\text{لا} + \text{معف لا})}{\text{جب}\,(\text{لا} + \text{معف لا})\,\text{جب لا}} = \frac{۲\,\text{جم}\,(\text{لا} + \frac{\text{معف لا}}{۲})\,\text{جب}\,(-\frac{\text{معف لا}}{۲})}{\text{جب}\,(\text{لا} + \text{معف لا})\,\text{جب لا}}$$

$$\therefore \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{نہا}_{\text{معٹ لا}\to ۰} \frac{\text{معٹ ما}}{\text{معٹ لا}} = \text{نہا}_{\text{معٹ لا}\to ۰} \frac{-\text{جب}\left(\frac{\text{معٹ لا}}{۲}\right)}{\frac{\text{معٹ لا}}{۲}} \cdot \frac{\text{جم}\left(\text{لا} + \frac{\text{معٹ لا}}{۲}\right)}{\text{جب لا جب}(\text{لا} + \text{معٹ لا})}$$

$$= - \frac{\text{جم لا}}{\text{جب}^{۲}\text{ لا}} = -\text{مم لا قم لا}$$

اور معکوب عمل سے $\int \text{مم لا قم لا فر لا} = -\text{قم لا} + \text{مستقل}$

# توضیحی مثالیں

مثال (۱) $\text{ما} = \text{جم}(۲\text{ لا} + ۳)$ کا تفرقی سر دریافت کرو۔

فرض کرو $۲\text{ لا} + ۳ = \text{طہ} \quad \therefore \text{ما} = \text{جم طہ}$

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر طہ}} \times \frac{\text{فر طہ}}{\text{فر لا}} = -\text{جب طہ} \times ۲ = -۲\text{ جب}(۲\text{ لا} + ۳)$$

مثال (۲) $\text{مس}\left[\text{جب}^{۲}(۳\text{ لا} - ۱)\right]$ کا مشتق تفاعل بلحاظ لا دریافت کرو۔

فرض کرو کہ $\text{ما} = \text{مس}\left[\text{جب}^{۲}(۳\text{ لا} - ۱)\right]$

اور $\text{ی} = \text{جب}^{۲}(۳\text{ لا} - ۱)$

$۳\text{ لا} - ۱ = ٧ \qquad \therefore \text{ما} = \text{مس ی}$ اور $\text{ی} = \text{جب}^{۲}\, ٧$

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر ی}} \times \frac{\text{فر ی}}{\text{فر } ٧} \times \frac{\text{فر } ٧}{\text{فر لا}} = \text{قط}^{۲}\text{ ی} \times ۲\text{ جب } ٧ \text{ جم } ٧ \times ۳$$

$$= ٦\text{ قط}^{۲}\left[\text{جب}^{۲}(۳\text{ لا} - ۱)\right] \times \text{جب}(۳\text{ لا} - ۱)\text{ جم}(۳\text{ لا} - ۱)$$

مثال (۳) $\int ۳\text{ جب}^{۲}(۳\text{ لا} + ۲)\text{ جم}(۳\text{ لا} + ۲)\text{ فر لا}$ کی قیمت دریافت کرو۔

فرض کرو کہ $\text{جب}(۳\text{ لا} + ۲) = \text{ی}$

$۳\text{ لا} + ۲ = ٧ \qquad \therefore \text{ی} = \text{جب } ٧$

$$\therefore \int ۳\text{ جب}^{۲}(۳\text{ لا} + ۲)\text{ جم}(۳\text{ لا} + ۲)\text{ فر لا} = \int ۳\text{ ی}^{۲} \frac{\text{فر ی}}{\text{فر } ٧} \times \text{فر لا}$$

$$= \int \text{ی}^{۲} \frac{\text{فر ی}}{\text{فر } ٧} \times \frac{\text{فر } ٧}{\text{فر لا}} \times \text{فر لا} = \int \text{ی}^{۲}\text{ فر ی}$$

= ۱/۴ ی$^{4}$ + مستقل = ۱/۳ جب$^{3}$ (۳لا + ۲) + مستقل

# مشقی سوالات ۱۴

ذیل کے تفاعلوں کو تفرق کرو :—

(۱) جم$^{2}$ (۲ طہ + ۳) (۲) جب$^{3}$ (۳/طہ)

(۳) جب (۲ طہ - ۳) + مس ۲ طہ

(۴) جب طہ جم طہ (۵) جب (۲طہ-۳) جم (طہ) (۶) تم (۲ طہ)

(۷) قط$^{2}$ (طہ - ۴) (۸) مس (۲لا + ۱) - مم$^{3}$ (لا+۱) (۹) ۱ / قط(۲لا+۱) تم(لا-۲)

(۱۰) قط$^{3}$ (۲لا$^{2}$ - ۳لا + ۴) + قم$^{4}$ (۵لا)

ذیل کے تکملوں کی قیمت دریافت کرو :—

(۱۱) ∫ جب (۲لا + ۳) فرلا (۱۲) ∫ جم (لا - ۱) فرلا (۱۳) قط$^{2}$ (۴لا - ۱) فرلا

(۱۴) ∫ جب$^{2}$ طہ فرطہ [ نوٹ :- پہلے جب$^{2}$ طہ کو ۲ طہ کی مثلثی نسبت میں بیان کرو ]

(۱۵) ∫ جب (۲ طہ + ۳) جم (۳ - ۲ طہ) فرطہ (۱۶) قم$^{2}$ (۲ طہ) فرطہ

## ۳،۶۴ :- تفاعلوں کے حاصل ضرب اور حاصل تقسیم کو تفرق کرنا :—

(ا) دو تفاعلوں کے حاصل ضرب کا تفرقی سر :—

فرض کرو کہ ا = د × و جہاں د اور و متغیر لا کے تفاعل ہیں۔ اگر لا میں مف لا کا اضافہ کیا جائے تو ا، د اور و کے اضافوں میں ذیل کا رشتہ ہوگا —

$$\text{مف ما} = (\text{ی} + \text{مف ی})(\text{و} + \text{مف و}) - \text{ی و} = \text{ی مف و} + \text{و مف ی} + \text{مف ی} \times \text{مف و}$$

اس لیے
$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \underset{\text{مف لا}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \underset{\text{مف لا}\to 0}{\text{نہا}} \left[\frac{\text{ی مف و}}{\text{مف لا}} + \frac{\text{و مف ی}}{\text{مف لا}} + \frac{\text{مف ی} \times \text{مف و}}{\text{مف لا}}\right]$$

$$= \text{ی} \frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} + \text{و} \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$$

$$\therefore \frac{1}{\text{ما}} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}}}{\text{و}} + \frac{\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}}{\text{ی}}$$

اسی طرح اگر $\text{ی}_1$، $\text{ی}_2$، .... $\text{ی}_\text{ن}$ متغیر لا کے تفاعل ہوں تو

$$\frac{1}{\text{ی}_1 \times \text{ی}_2 \times \cdots \times \text{ی}_\text{ن}} \frac{\text{فر}}{\text{فرلا}} (\text{ی}_1 \times \text{ی}_2 \times \text{ی}_3 \times \cdots \times \text{ی}_\text{ن}) = \frac{\frac{\text{فری}_1}{\text{فرلا}}}{\text{ی}_1} + \frac{\frac{\text{فری}_2}{\text{فرلا}}}{\text{ی}_2} + \cdots + \frac{\frac{\text{فری}_\text{ن}}{\text{فرلا}}}{\text{ی}_\text{ن}}$$

الفاظ میں اس کو یوں بیان کر سکتے ہیں کہ حاصل ضرب کا تفرقی سر مساوی ہے تفاعل ضرب ایسا مجموعہ جس کی رقمیں ہر جزو کے تفرقی سر کو اس جزو پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہیں۔

اگر اس میں ہر جزو کو لا کے مساوی رکھا جائے تو $\frac{1}{\text{لا}^\text{ن}} \frac{\text{فر}(\text{لا}^\text{ن})}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ن}}{\text{لا}}$

یعنی $\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}} (\text{لا}^\text{ن}) = \text{ن لا}^{\text{ن}-1}$ جب ن مثبت صحیح عدد ہے اور یہ $\text{لا}^\text{ن}$ کے تفرقی سر حاصل کرنے کے ضابطہ کا دوسرا ثبوت ہے۔

(ب) دو تفاعلوں کے حاصل تقسیم کا تفرقی سر:—

فرض کرو کہ $\text{ما} = \frac{\text{ی}}{\text{و}}$ جہاں ی اور و متغیر لا کے تفاعل ہیں۔

اس لیے
$$\text{مف ما} = \frac{\text{ی} + \text{مف ی}}{\text{و} + \text{مف و}} - \frac{\text{ی}}{\text{و}} = \frac{\text{و مف ی} - \text{ی مف و}}{\text{و}(\text{و} + \text{مف و})}$$

$$\therefore \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \underset{\text{مف لا}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \underset{\text{مف لا}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{و}\frac{\text{مف ی}}{\text{مف لا}} - \text{ی}\frac{\text{مف و}}{\text{مف لا}}}{\text{و}^2 + \text{و مف و}}$$

$$= \frac{\text{و}\,\frac{\text{فر ی}}{\text{فر لا}} - \text{ی}\,\frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}}}{\text{و}^{۲}}$$

الفاظ میں یہ ضابطہ اس طرح بیان ہو سکتا ہے کہ کسی کسر کے تفرقی سر کا نسب نما ابتدائی کسر کے نسب نما کا مربع ہوگا اور شمار کنندہ نسب نما ضرب شمار کنندہ کا تفرقی سر منفی شمار کنندہ ضرب نسب نما کا تفرقی سر ہوگا۔

اس ضابطہ کو حاصل ضرب کے ضابطے کی مدد سے بھی نکالا جا سکتا ہے۔

$$\text{ما} = \text{ی} \times \frac{۱}{\text{و}} = \text{ی} \times \text{و}^{-۱}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ی} \times \text{و}^{-۱}\left[\frac{\frac{\text{فر ی}}{\text{فر لا}}}{\text{ی}} + \frac{\frac{\text{فر}(\text{و}^{-۱})}{\text{فر لا}}}{\text{و}^{-۱}}\right]$$

$$= \frac{\text{ی}}{\text{و}}\left[\frac{\frac{\text{فر ی}}{\text{فر لا}}}{\text{ی}} + \frac{(-۱)\times \text{و}^{-۲}\,\frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}}}{\text{و}^{-۱}}\right]$$

$$= \frac{\text{ی}}{\text{و}}\left[\frac{\frac{\text{فر ی}}{\text{فر لا}}}{\text{ی}} - \frac{\frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}}}{\text{و}}\right]$$

$$= \frac{\text{و}\,\frac{\text{فر ی}}{\text{فر لا}} - \text{ی}\,\frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}}}{\text{و}^{۲}} \quad \text{حسب سابق}$$

ضابطہ $\frac{\text{فر}(\text{ی و})}{\text{فر لا}} = \text{ی}\,\frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}} + \text{و}\,\frac{\text{فر ی}}{\text{فر لا}}$ پر متقلوب عمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$\text{ی و} = \int \text{ی فر و} + \int \text{و فر ی}$ اس سے تکمل بالحصص کا ضابطہ اخذ ہوتا ہے جس کی تکمل میں بہت اہمیت ہے اور اسے تکمل کے باب میں وضاحت سے بتایا جائیگا۔

# توضیحی مثالیں

مثال (۱) — اگر $\text{ما} = \text{لا}^{۲}$ جب لا تو $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ دریافت کرو۔

$$\frac{\text{فر ا}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر}(\text{لا}^{۲})}{\text{فر لا}} \times \text{جب لا} + \text{لا}^{۲}\frac{\text{فر}(\text{جب لا})}{\text{فر لا}}$$

$$= ۲\,\text{لا جب لا} + \text{لا}^{۲}\,\text{جم لا}$$

**مثال (۲)**— $\text{ا} = \frac{\text{لا}^{۲} + ۳}{(۱ + \text{لا}^{۳})}$ کو تفرق کرو۔

$$\text{عف ا} = \frac{(۱+\text{لا}^{۳})\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}(\text{لا}^{۲}+۳) - (\text{لا}^{۲}+۳)\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}(۱+\text{لا}^{۳})}{(۱+\text{لا}^{۳})^{۲}}$$

$$= \frac{۲\text{لا}(۱+\text{لا}^{۳}) - ۳\text{لا}^{۲}(\text{لا}^{۲}+۳)}{(۱+\text{لا}^{۳})^{۲}} = \frac{۲\text{لا} - ۹\text{لا}^{۲} - \text{لا}^{۴}}{(۱+\text{لا}^{۳})^{۲}}$$

# مشقی سوالات ۱۵

ذیل کو تفرق کرو:—

(۱) $\text{لا}^{۲}(\text{لا}^{۳}+۱)^{۲}$ (۲) $\text{لا}^{۳}(۲\text{لا}+۳)^{۵}$ (۳) $\frac{(۳\text{لا}^{۲}+۱)}{۶\text{لا}+۳}$

(۴) $\frac{۴\text{لا}-۳}{۲\text{لا}+۱} \times \text{جم لا}$ (۵) $\frac{\text{جب}^{۲}\text{لا}+۱}{۲\,\text{مس لا}+۳}$ (۶) $\text{جب ط مس}(۲\text{ط}+\text{عہ})$

(۷) $\text{جب}(\text{ط}+\text{عہ})\,\text{جم}(\text{ط}-\text{عہ})$ (۸) $\frac{(\text{ا لا}+\text{ب})^{۲}}{\text{ج لا}+\text{د}}\,\text{جب}(\text{لا}+\text{عہ})$

(۹) $\frac{۵\text{لا}+۱}{۷\text{لا}^{۲}+۸\text{لا}-۵}$ (۱۰) $\frac{(۲\text{لا}-۱)^{۴}(۵\text{لا}^{۲}+۳\text{لا}-۲)^{۲}}{(۸\text{لا}^{۲}+۳)^{۳}(۳\text{لا}+۲)^{۲}}$

(۱۱) $\frac{\text{قط}(۲\text{ط})\,\text{مس}\,۳\text{ط}}{\text{جب}(۴\text{ط}+۵)}$ (۱۲) $\frac{\text{قم فہ جم}(۲\text{فہ}-۱)\,\text{قط}(۳\text{فہ})}{\text{فہ}+۲}$

## ۳۶۵:— تضمینی (Implicit) تفاعل کو تفرق کرنا:-

تفاعل کی تعریف میں بتلایا گیا ہے کہ دو متغیروں میں کسی رشتہ کو تفاعل کہتے ہیں۔ اور ان میں سے کسی ایک متغیر کو متبوع متغیر اور دوسرے کو تابع متغیر فرض کرو کہ ف (لا، ما) = ۰ کوئی تفاعل ہے۔ اس میں لا یا ما کو متبوع متغیر فرض کر سکتے ہیں۔ لیکن بالعموم اگر ان میں سے کوئی ایک متغیر دوسرے متغیر کی رقوم میں تصریحی طور پر بیان ہو سکتا ہے تو اول الذکر کو تابع متغیر اور موخر الذکر کو متبوع متغیر کہتے ہیں۔

بعض دفعہ دونوں ایک دوسرے کی رقوم میں صریح طور پر بیان ہو سکتے اور بعض دفعہ کوئی بھی نہیں۔ صریح طور پر بیان ہونے والی صورت میں تفرقی سر $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ یا $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}}$ ہوگا لیکن ان دونوں مشتقوں میں بہت سادہ رشتہ ہے اور اس سے بہت سارے سوالات میں بے حد سہولت ہوتی ہے۔

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{نہا}_{\text{مف لا}\to ۰} \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \text{نہا}_{\text{مف لا}\to ۰} \frac{1}{\frac{\text{مف لا}}{\text{مف ما}}}$$

اب اگر مف لا ← ۰ تو لازماً مف ما ← ۰

اس لیے $$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{نہا}_{\text{مفا}\to ۰} \frac{1}{\frac{\text{مف لا}}{\text{مف ما}}} = \frac{1}{\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}}}$$

یعنی $$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \times \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = 1$$

لیکن اگر ف (لا، ما) = ۰ کو صریح طور پر کسی متغیر کی رقوم میں نہیں بیان کیا جا سکتا ہے تو ف (لا، ما) کی ہر رقم کو بلحاظ لا تفرق کر لو اور اس سے جو جملہ بنتا ہے اس کو صفر کے مساوی رکھو یعنی $\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}$ [ف (لا، ما)] = ۰۔ اس کو حل کرنے سے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ یا $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}}$ کے لیے جملہ حاصل ہوگا اور اس میں بالعموم دونوں متغیر موجود ہوں گے۔

## توضیحی مثالیں

مثال (۱)۔ اگر ما = جب$^{-1}$ لا تو $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ دریافت کرو۔

$$\therefore \quad \text{لا} = \text{جب ما} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = \text{جم ما}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{۱}{\text{جم ما}} = \pm \frac{۱}{\sqrt{۱-\text{لا}^{۲}}}$$

مثال (۲) $\text{ا لا}^{۲} + ۲\,\text{ھ لا ما} + \text{ب ما}^{۲} + \text{ج} = ۰$ سے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کی قیمت دریافت کرو۔

اس مساوات کو لا یا ما کے لیے حل کر سکتے ہیں اور پھر تفرق کر سکتے ہیں۔ لیکن حل میں جذر موجود ہوگا جس کی وجہ سے تفرق میں ذرا مشکل ہوگی۔ اس لیے جملہ کو راست تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے:

$$۲\,\text{ا لا} + ۲\,\text{ھ ما} + ۲\,\text{ھ لا}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ۲\,\text{ب ما}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۰$$

$$\therefore \quad ۲\,(\text{ھ لا} + \text{ب ما})\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = -۲\,(\text{ا لا} + \text{ھ ما})$$

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = -\,\frac{\text{ا لا} + \text{ھ ما}}{\text{ھ لا} + \text{ب ما}}$$

## مشقی سوالات ۱۶

ذیل میں $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کی قیمت معلوم کرو:-

(۱) $\text{لا} + ۳\,\text{ما}^{۲} + ۲\,\text{لا ما} + ۴\,\text{ما} + ۱ = ۰$

(۲) $\text{لا} = ۷\,\text{ما}^{۳} - ۸\,\text{ما}^{۲} + ۱$　　(۳) $\text{لا} = \text{قم}\,(۲\,\text{ما} + ۳)$

(۴) $\text{ھ} = \frac{۴\,\text{ما}^{۳} + ۳\,\text{ما}}{۲\,\text{ما}^{۲} - ۱} \times \text{لا}$　　(۵) $\text{مس}\,(\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲}) = \text{لا ما}$

(۶) $\text{قط}\,\frac{\text{لا}}{\text{ما}} = \text{لا}^{۲}$　　(۷) $\text{لا} + \sqrt{\text{لا ما}} + \text{ما} = \text{ا}$

(۸) $\frac{\text{لا}}{\text{ما}} + \sqrt{\frac{\text{ما}}{\text{لا}}} = \text{ج}$ (۹) $\text{لا}^{۲}\,\text{ما}^{۲} - \text{لا}^{۴} - ۲\,\text{ما}^{۴} = ۶$

(۱۰) $\text{لا}^{۳} + \text{ما}^{۳} - ۳\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ل} = ۰$

ذیل کے منحنیوں کے ڈھال دیے ہوئے نقطوں پر معلوم کرو :—

(۱۱) $\text{لا}^{۲} + ۳\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ما}^{۲} + ۱ = ۰$ کے نقطہ (۲، −۱) پر

(۱۲) $\text{لا}^{۳} - \text{ل}\,\text{لا}\,\text{ما} + ۲\,\text{ل}\,\text{ما}^{۲} = ۲\,\text{ل}^{۳}$ کے نقطہ (ل، ل) پر

(۱۳) $\text{لا}^{۲} = ۶\,\text{ما} - \text{ما}^{۳}$ کے نقطہ (−۲، ۲) پر

(۱۴) $۳\sqrt{۲\,\text{لا}} - \text{ما}^{\frac{۱}{۲}} = ۱$ کے نقطہ (۴، ۱) پر

(۱۵) منحنی $\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} = ۲۵$ کے نقاط (−۳، ۴)، (۴، ۳)، (−۴، −۳) پر

## ۳،۶۶ ـ مقلوب مثلثی تفاعلوں کو تفرق کرنا۔

(ل) فرض کرو کہ ما = $\text{جب}^{-۱}\,\text{لا}$ یہ تفاعل متعدد قیمت والا تفاعل ہے یعنی لا کی ہر قیمت کے جواب میں ما کی لامتناہی قیمتیں ہیں۔ ما کو واحد قیمتی تفاعل بنانے کے لیے بالعموم ما کی وہ قیمت لی جاتی ہے جو $-\frac{\pi}{۲}$ اور $+\frac{\pi}{۲}$ کے درمیان واقع ہو۔ اس لیے

$$\text{لا} = \text{جب}\,\text{ما} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{فر}\,\text{لا}}{\text{فر}\,\text{ما}} = \text{جم}\,\text{ما}$$

$\therefore \frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}} = \frac{۱}{\text{جم}\,\text{ما}}$ اور اگر ما کی قیمت $-\frac{\pi}{۲}$ اور $\frac{\pi}{۲}$ کے درمیان ہو تو جم ما مثبت ہے

$$\text{اس لیے} \quad \frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}} = \frac{۱}{\text{جم}\,\text{ما}} = + \frac{۱}{\sqrt{۱ - \text{جب}^{۲}\,\text{ما}}} = \frac{+۱}{\sqrt{۱ - \text{لا}^{۲}}}$$

اس کے علاوہ اشتباہ علامت دُور کرنے کے لیے ہم یوں بھی کہہ سکتے ہیں کہ جیسے لا کی قیمت −۱ سے +۱ تک بڑھتی ہے تو ما کی قیمت $-\frac{\pi}{۲}$ سے $+\frac{\pi}{۲}$ تک بڑھتی ہے۔ یعنی مف لا اور مف ما دونوں مثبت ہیں اور لازماً $\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}}$

مثبت ہوگا۔

(ب) جم$^{-1}$ لا کو تفرق کرنا

ما = جم$^{-1}$ لا کو واحد قیمتی تفاعل بنانے کے لیے بالعموم لا کی کسی قیمت کے جواب میں ما کی وہ قیمت لی جاتی ہے جو صفر اور π کے درمیان واقع ہو۔ پس جیسے ما کی قیمت صفر سے π تک بڑھتی ہے لا کی قیمت +۱ سے گھٹ کر -۱ ہو جاتی ہے یعنی $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ منفی مقدار ہوگی۔

اب لا = جم ما اس لیے $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}}$ = - جب ما

اور اگر ما کی قیمت صفر اور π کے درمیان ہو تو جب ما مثبت ہوگا۔

اس لیے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = -\frac{1}{\text{جب ما}} = -\left[\frac{1}{+\sqrt{1-\text{جم}^2\,\text{ما}}}\right] = -\frac{1}{\sqrt{1-\text{لا}^2}}$

ضابطہ (ا) اور (ب) پر مقلوب عمل سے حاصل ہوتا ہے

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{1-\text{لا}^2}} = \text{جب}^{-1}\,\text{لا} + \text{مستقل}$$

$$\text{اور}\quad -\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{1-\text{لا}^2}} = \text{جم}^{-1}\,\text{لا} + \text{مستقل}$$

جب$^{-1}$ لا اور جم$^{-1}$ لا کے تفرقی سر کی علامتوں کا تعین ان کی صدر قیمتوں سے کیا گیا ہے۔ اگر صدر قیمتوں کی مختلف تعریف کی جائے تو علامت بھی بدل سکتی ہے۔ مثلاً اگر جب$^{-1}$ لا سے وہ زاویہ مراد ہو جو $\frac{\pi}{2}$ اور $\frac{3\pi}{2}$ کے درمیان ہے تو جب$^{-1}$ لا کا تفرقی سر منفی ہوگا۔

نیز اگر جم$^{-1}$ لا سے وہ زاویہ مراد ہو جو π اور ۲π کے درمیان ہے تو جم$^{-1}$ لا کا تفرق مثبت ہوگا۔ اور ظاہر ہے کہ جب$^{-1}$ لا = $\frac{\pi}{2}$ + جم$^{-1}$ لا

اس لیے $\pm\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{1-\text{لا}^2}}$ کی قیمت جب$^{-1}$ لا + مستقل یا جم$^{-1}$ لا + مستقل لکھی جاسکتی ہے چونکہ $\frac{\pi}{2}$ مستقل میں شریک ہے۔

## (ج) مس$^{-1}$ لا کا تفرق:۔

ما = مس$^{-1}$ لا کو واحد قیمتی تفاعل بنانے کے لیے ما کی قیمت $-\frac{\pi}{2}$ اور $+\frac{\pi}{2}$ کے درمیان لی جاتی ہے۔ اور جیسے ما کی قیمت $-\frac{\pi}{2}$ سے $+\frac{\pi}{2}$ تک بڑھتی ہے لا کی قیمت $-\infty$ سے $+\infty$ تک بڑھتی ہے یعنی $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ مثبت ہوگا۔ اور چونکہ $\pi$ اس کا دور ہے اس لیے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ ہمیشہ مثبت رہیگا صدر قیمت کی خواہ کچھ بھی تعریف کی جائے۔

$$\text{لا} = \text{مس ما} \quad \therefore \quad \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}} = \text{قط}^{2}\ \text{ما}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{1}{\text{قط}^{2}\ \text{ما}} = \frac{1}{1+\text{لا}^{2}}$$

## (د) مم$^{-1}$ لا کا تفرق:۔

ما = مم$^{-1}$ لا کو واحد قیمت تفاعل بنانے کے لیے ما کی قیمت $-\frac{\pi}{2}$ اور $+\frac{\pi}{2}$ کے درمیان لی جاتی ہے۔ اور جیسے ما کی قیمت $-\frac{\pi}{2}$ سے بڑھ کر صفر ہوتے ہوئے $\frac{\pi}{2}$ تک جاتی ہے ویسے لا کی قیمت صفر سے گھٹ کر $-\infty$ ہوتی ہے اور پھر $+\infty$ سے صفر تک گھٹتی ہے۔ یعنی $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ ہمیشہ منفی ہوگا۔

$$\text{لا} = \text{مم ما} \quad \therefore \quad \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}} = -\ \text{قم}^{2}\ \text{ما}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = -\frac{1}{\text{قم}^{2}\ \text{ما}} = -\frac{1}{1+\text{لا}^{2}}$$

نتیجہ (ج) اور (د) کو تکمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے:

$$\int \frac{\text{فر لا}}{1+\text{لا}^{2}} = \text{مس}^{-1}\ \text{لا} + \text{مستقل}$$

$$\text{اور} \quad -\int \frac{\text{فر لا}}{1+\text{لا}^{2}} = \text{مم}^{-1}\ \text{لا} + \text{مستقل}$$

ہمیں معلوم ہے کہ $\text{مس}^{-1}\text{لا} = \frac{\pi}{2} - \text{مم}^{-1}\text{لا}$

اور اس لیے $\int \frac{\text{فرلا}}{1+\text{لا}^2}$ کی قیمت $\text{مس}^{-1}\text{لا}$ + مستقل یا مستقل $- \text{مم}^{-1}\text{لا}$ لکھی جا سکتی ہے۔

## (ھ) $\text{قط}^{-1}$ لا کا تفرقی سر:—

ما = $\text{قط}^{-1}$ لا کو واحد قیمتی تفاعل بنانے کے لیے ما کی وہ قیمت لی جاتی ہے جو صفر اور $\pi$ کے درمیان ہو۔ اور جیسے ما صفر سے $\frac{\pi}{2}$ تک اور $\frac{\pi}{2}$ سے $\pi$ تک بڑھتا ہے لا کی قیمت ایک سے لاتناہی تک اور منفی لاتناہی سے $-1$ تک بڑھتی ہے۔

اس لیے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ مثبت ہوگا۔

$$\text{لا} = \text{قط ما} \quad \therefore \quad \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = \text{قط ما مس ما}$$

اور $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\text{قط ما مس ما}} = \frac{1}{|\text{لا}|\sqrt{\text{لا}^2-1}}$ چونکہ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کی قیمت مثبت ہے۔

## (و) $\text{قم}^{-1}$ لا کو تفرق کرنا:—

ما = $\text{قم}^{-1}$ لا کو واحد قیمتی تفاعل بنانے کے لیے ما کی وہ قیمت لی جاتی ہے جو $-\frac{\pi}{2}$ اور $+\frac{\pi}{2}$ کے درمیان ہے۔ اب جیسے ما کی قیمت $-\frac{\pi}{2}$ سے صفر تک اور صفر سے $+\frac{\pi}{2}$ تک بڑھتی ہے ویسے لا کی قیمت $-1$ سے $-\infty$ تک اور پھر $+\infty$ سے ایک تک کم ہوتی ہے اس لیے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ منفی ہوگا۔

$$\text{لا} = \text{قم ما} \quad \therefore \quad \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = -\text{قم ما مم ما}$$

$\therefore \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = -\frac{1}{\text{قم ما مم ما}} = -\frac{1}{|\text{لا}|\sqrt{\text{لا}^2-1}}$ چونکہ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ منفی ہے۔

ضابطہ (ھ) اور (و) کو تکمل کرنے سے

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^{2}-1}} = \text{قط}^{-1}\,\text{لا} + \text{مستقل}$$

$$\text{اور} \quad -\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^{2}-1}} = \text{قم}^{-1}\,\text{لا} + \text{مستقل}$$

اور جیسا کہ (ا) اور (ب) میں بتایا گیا ہے علامت کا فرق صرف صدر قیمت کی تعریف کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے

$$\text{اور} \quad \text{قم}^{-1}\,\text{لا} = \frac{\pi}{2} + \text{قط}^{-1}\,\text{لا}$$

اس لیے $\pm \int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^{2}-1}}$ کی قیمت $\text{قم}^{-1}$ لا + مستقل یا $\text{قط}^{-1}$ لا + مستقل لکھی جاسکتی ہے۔

# توضیحی مثالیں

مثال (۱) عف $\left[\text{جب}^{-1}\left(\text{جم}\,\frac{2\text{لا}}{3}\right)\right]$ کی قیمت دریافت کرو۔

$$\text{عف}\left[\text{جب}^{-1}\left(\text{جم}\,\frac{2\text{لا}}{3}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{1-\text{جم}^{2}\frac{2\text{لا}}{3}}} \times \left(-\text{جب}\,\frac{2\text{لا}}{3}\right) \times \frac{2}{3} = \frac{-\frac{2}{3}\,\text{جب}\,\frac{2\text{لا}}{3}}{\text{جب}\,\frac{2\text{لا}}{3}} = -\frac{2}{3}$$

مثال (۲) $\frac{\text{فر}}{\text{فرط}}\left[\text{مس}^{-1}\left(\text{جم ط} - \text{جب ط}\right)\right]$ کی قیمت دریافت کرو۔

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرط}}\left[\text{مس}^{-1}(\text{جم ط} - \text{جب ط})\right] = \frac{\frac{\text{فر}}{\text{فرط}}(\text{جم ط} - \text{جب ط})}{1+(\text{جم ط} - \text{جب ط})^{2}} = \frac{-\text{جب ط} - \text{جم ط}}{2 - 2\,\text{جب ط جم ط}} = \frac{\text{جب ط} + \text{جم ط}}{\text{جب}\,2\text{ط} - 2}$$

## مشقی سوالات ۱۷

ذیل کو تفرق کرو:—

(۱) $قط^{-1}(جم\ ۲لا + ۳)$ (۲) $جم^{-1}(جب\ ۲لا)$ (۳) $جم^{-1}\frac{لا}{ا}$

(۴) $جب^{-1}\frac{لا}{ا}$ (۵) $مس^{-1}\frac{لا}{ا}$ (۶) $قط^{-1}\frac{لا}{ا}$ (۷) $تم^{-1}\frac{لا}{ا} - قم^{-1}\frac{لا}{ا}$

(۸) $قط^{-1}(۱-لا)$ (۹) $لا^{2}\ مس^{-1}لا$ (۱۰) $لا\ مس^{-1}لا^{2} + \frac{۵}{۲}مس^{-1}\frac{لا}{۲}$

(۱۱) $مس^{-1}\sqrt{لا}$ (۱۲) $\sqrt{لا^{2} - ۴} + ۲\ مس^{-1}\frac{لا - ۴}{۲}$

(۱۳) $جب^{-1}لا^{2} + لا\ قط^{-1}\frac{لا}{۲}$

(۱۴) $قط^{-1}(ا لا^{2} + ب لا + ج) \times قم^{-1}(اَ لا^{2} + بَ لا + جَ)$

ذیل کے تکملوں کی قیمت دریافت کرو :-

(۱۵) $\int \frac{فرلا}{\sqrt{ا^{2} - لا^{2}}}$ (۱۶) $\int \frac{فرلا}{\sqrt{۴ - ۹لا^{2}}}$ (۱۷) $\int \frac{فرلا}{ا^{2} + لا^{2}}$

(۱۸) $\int \frac{فرلا}{ا^{2} + (ب لا + ج)^{2}}$ (۱۹) $\int \frac{لا\ فرلا}{۹ + ۴لا^{4}}$ (۲۰) $\int \left(۱ - \frac{۳}{۴ + ۳لا^{2}}\right) فرلا$

(۲۱) $\int \frac{۴لا^{2} + ۳}{۳لا^{2} + ۱} فرلا$ (۲۲) $\int \frac{ا لا^{2} + ب}{لا^{2} + د^{2}} فرلا$ (۲۳) $\int \frac{فرلا}{\sqrt{۵ - ۷لا^{2}}}$

(۲۴) $\int \frac{فرلا}{\sqrt{ا^{2} - (ا - لا)^{2}}}$ (۲۵) $\int \frac{فرط}{\sqrt{ب ط - ط^{2}}}$ (۲۶) $\int \frac{ی\ فری}{\sqrt{۶ی^{2} - ۸ی^{2}}}$

(۲۷) $\int \frac{فرلا}{لا\sqrt{لا^{2} - ا^{2}}}$ (۲۸) $\int \frac{۳\ فرلا}{لا\sqrt{۴لا^{2} - ۹}}$ (۲۹) $\int \frac{فرلا}{لا\sqrt{۴لا^{2} - ۱۲}}$

(۳۰) $\int \left(۳ - \frac{۱}{لا\sqrt{۵لا^{2} - ۳}}\right) فرلا$

## ۳۰۷ - لوگارتھم اور قوت نما تفاعلوں کی تعریف :-

پہلے باب میں بتایا گیا ہے کہ $\underset{ن \to \infty}{نہا}\left(۱ + \frac{۱}{ن}\right)^{ن}$ ایک معین عدد کی طرف

مائل ہوتی ہے اور اس عدد کو قو سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

$$\text{قو} = 1 + 1 + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \frac{1}{\lfloor 4} + \cdots = 2.718\ldots$$

اسی طرح $\text{قو}^{\text{لا}} = \underset{\text{ن} \to \infty}{\text{نہا}} \left(1 + \frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = 1 + \text{لا} + \frac{\text{لا}^2}{\lfloor 2} + \frac{\text{لا}^3}{\lfloor 3} + \cdots$

تفاعل $\text{قو}^{\text{لا}}$ کو قوت نما تفاعل کہتے ہیں۔ اس کے مقلوب تفاعل لوکارتمی تفاعل کی تعریف حسب ذیل کرینگے کہ اگر $\text{ما} = \text{ر}^{\text{لا}}$ تو کہتے ہیں کہ ما کا لوکارتم بہ اساس ر مساوی ہے لا کے، اور علامتوں میں ظاہر کرتے ہیں کہ $\text{لوک}_{\text{ر}}\,\text{ما} = \text{لا}$ ۔ اساس ر کی قیمت کچھ بھی لی جا سکتی ہے لیکن اعلیٰ ریاضی میں اساس قو اور حسابی سوال میں اساس ۱۰ لینے سے بہت سہولت ہوتی ہے اور اگر لوکارتم کا اساس واضح طور پر بیان نہ ہو تو احصا کے سوال میں قو اور حسابی سوال میں ۱۰ مان لیا جائے۔ لوکارتم کی ابتدائی خاصیتوں سے طالب علم الجبرا میں خوب واقف ہے اور اس لیے یہاں بیان کرنے کی کوئی ضرورت نہیں ہے۔ لوکارتم تفاعل کی تعریف قوت نما تفاعل کے مقلوب تفاعل کی طرح کی گئی ہے۔ لیکن اعلیٰ ریاضی لوکارتم تفاعل کی تعریف بالعموم ایک تکملہ سے کیجاتی ہے۔ معیاری شکلوں میں بتایا گیا ہے کہ $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}}$ کی قیمت الجبرا کے تفاعلوں کی رقوم میں نہیں بیان ہو سکتی ہے اس کے لیے ایک نیا تفاعل ایجاد کیا جاتا ہے جس کی تعریف ہوگی۔

$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} = \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{لا} + \text{م}$، اس میں مستقل کو تعین کرنے کے لیے فرض کرو کہ $\text{لوک}_{\text{و}}\,1 = 0$ ۔ اس لیے $\int_1^{\text{لا}} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} = \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{لا}$، اس تعریف سے لوکارتم تفاعل کی تمام خاصیتیں بہت صحت کے ساتھ ثابت ہو جاتی ہیں اور اس لیے یہ تعریف عام طور پر مروج ہے۔

نیز معلوم ہے کہ $\text{لوک}_{\text{و}}\,(1 + \text{لا}) = \text{لا} - \frac{\text{لا}^2}{2} + \frac{\text{لا}^3}{3} - \cdots$ جبکہ $\text{لا} \lessdot 1$ اس پھیلاؤ کی مدد سے عددوں کے لوکارتم نکالے جاتے ہیں اور پھر اس کو

اساس ۱۰ پر تبدیل کر لیا جاتا ہے۔

## ۷۵، ۳۲ - قوت نما اور لوکارتھم تفاعل کو تفرق کرنا:-

(ا) قوت نما تفاعل کا تفرق:- فرض کرو کہ $\text{ا} = \text{و}^{\text{لا}}$

اس لیے $\text{مف ا} = \text{و}^{\text{لا} + \text{مف لا}} - \text{و}^{\text{لا}} = \text{و}^{\text{لا}} (\text{و}^{\text{مف لا}} - ۱)$

$$\therefore \frac{\text{مف ا}}{\text{مف لا}} = \text{و}^{\text{لا}} \times \frac{\text{و}^{\text{مف لا}} - ۱}{\text{مف لا}}$$

$$\therefore \frac{\text{فر ا}}{\text{فر لا}} = \text{نہا}_{\text{مف لا} \to ۰} \frac{\text{مف ا}}{\text{مف لا}} = \text{و}^{\text{لا}} \times \text{نہا}_{\text{مف لا} \to ۰} \frac{\text{و}^{\text{مف لا}} - ۱}{\text{مف لا}}$$

$$= \text{و}^{\text{لا}} \times ۱ = \text{و}^{\text{لا}}$$ [دیکھو دفعہ ۴۵، ۲]

اور بقلوب عمل سے $\int \text{و}^{\text{لا}}\, \text{فر لا} = \text{و}^{\text{لا}} + \text{مستقل}$

نیز $\text{ر}^{\text{لا}}$ کا تفرق معلوم کرنے کے لیے ظاہر ہے کہ

$\text{ر}^{\text{لا}} = \text{و}^{\text{لا لوک}_{\text{و}} \text{ر}}$ چونکہ $\text{و}^{\text{لوک}_{\text{و}} \text{ر}} = \text{ر}$

اس لیے $\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}} (\text{ر}^{\text{لا}}) = \frac{\text{فر} [\text{و}^{\text{لا لوک}_{\text{و}} \text{ر}}]}{\text{فر لا}} = \text{و}^{\text{لا لوک}_{\text{و}} \text{ر}} \times \text{لوک}_{\text{و}} \text{ر}$

$$= \text{ر}^{\text{لا}} \times \text{لوک}_{\text{و}} \text{ر}$$

اور $\int \text{ر}^{\text{لا}}\, \text{فر لا} = \frac{\text{ر}^{\text{لا}}}{\text{لوک}_{\text{و}} \text{ر}} + \text{مستقل}$

(ب) لوکارتھم تفاعل کا تفرق:- فرض کرو کہ $\text{ا} = \text{لوک}_{\text{و}} \text{لا}$

$\therefore \text{لا} = \text{و}^{\text{ا}}$ اور $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ا}} = \text{و}^{\text{ا}} = \text{لا}$

اس لیے $\frac{\text{فر ا}}{\text{فر لا}} = \frac{۱}{\text{لا}}$

ابتدائی اصولوں سے لوکارثم کا تفرق نکالنے کے لیے

$$مف\ ما = لوک\,(لا + مف\ لا) - لوک\ لا = لوک\left(\frac{لا + مف\ لا}{لا}\right) = لوک\left(۱ + \frac{مف\ لا}{لا}\right)$$

$$\therefore \frac{مف\ ما}{مف\ لا} = \frac{۱}{مف\ لا} \times لوک\left(۱ + \frac{مف\ لا}{لا}\right) = \frac{۱}{لا} \times \frac{لا}{مف\ لا}\ لوک\left(۱ + \frac{مف\ لا}{لا}\right)$$

$$= \frac{۱}{لا} \times لوک\left(۱ + \frac{مف\ لا}{لا}\right)^{\frac{لا}{مف\ لا}}$$

$$\therefore \frac{فر\ ما}{فر\ لا} = نہا_{مف\ لا \to ۰} \frac{مف\ ما}{مف\ لا} = \frac{۱}{لا} \times نہا_{مف\ لا \to ۰} لوک\left(۱ + \frac{مف\ لا}{لا}\right)^{\frac{لا}{مف\ لا}}$$ اور اگر $ن = \frac{لا}{مف\ لا}$

$$= \frac{۱}{لا}\ نہا_{ن \to \infty} لوک\left(۱ + \frac{۱}{ن}\right)^{ن} = \frac{۱}{لا}\ لوک_{و}\ قو = \frac{۱}{لا}$$ [دیکھو دفعہ ۲،۴۶]

اسی طرح $لوک_{و}\ لا$ کا تفرقی سر معلوم کرنے کے لیے

$$لوک_{و}\ لا = لوک_{قو}\ لا \times لوک_{و}\ قو$$

$$\therefore \frac{فر}{فر\ لا}\left[لوک_{و}\ لا\right] = \frac{۱}{لا} \times لوک_{و}\ قو = \frac{۱}{لا} \times \frac{۱}{لوک_{قو}\ و}$$

اور تکمل سے $\int \frac{فر\ لا}{لا} = لوک\ لا + مستقل$

دفعہ ۳،۶۱ میں $لا^{ن}$ کا تفرقی سر نکالا گیا ہے جبکہ ن مثبت صحیح عدد ہے۔
اگر ن منفی مقدار یا کسر ہو تو ضابطہ ثابت کرنے کے لیے فرض کرو کہ $ما = لا^{ن}$
اور لوکارثم لینے سے

$$لوک_{و}\ ما = ن\ لوک_{و}\ لا$$

اس لیے $$\frac{۱}{ما}\ \frac{فر\ ما}{فر\ لا} = ن \times \frac{۱}{لا}$$

$$\therefore \frac{فر\ ما}{فر\ لا} = \frac{ن \times ما}{لا} = \frac{ن \times لا^{ن}}{لا} = ن\ لا^{ن-۱}$$

(ج) $د^{و}$ کو تفرق کرنا جبکہ د اور و دونوں متغیر لا کے تفاعل ہیں۔

فرض کرو کہ　$\text{ما} = \text{ی}^{\text{و}}$

اس کا لوکارتم لینے سے

$$\text{لوک ما} = \text{و}\ \text{لوک ی}$$

تفرق کرنے سے　$$\frac{\text{۱}}{\text{ما}}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}}\ \text{لوک ی} + \text{و} \times \frac{\text{۱}}{\text{ی}}\,\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$$

اس لیے　$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ی}^{\text{و}} \times \text{لوک ی} \times \frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} + \text{و} \times \text{ی}^{\text{و}-\text{۱}}\,\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$$

الفاظ میں اس تفرق کو یوں بیان کر سکتے ہیں کہ یُو کا تفرقی سر دو رقموں کا مجموعہ ہے جس کی پہلی رقم قوت نما کو متغیر اور ی کو مستقل مان کر تفرق کرنے سے حاصل ہوتی ہے اور دوسری رقم قوت نما کو مستقل مان کر تفاعل ی کو تفرق کرنے سے۔

# توضیحی مثالیں

مثال (۱)　$(\text{لا}^{\frac{۳}{۲}} - \text{۱})^{\frac{۲}{۳}}\ \text{و}^{\text{لا}^{۲}-\text{۱}}$ کو بلحاظ لا کے تفرق کرو۔

$$\text{عف}\left[(\text{لا}^{\frac{۳}{۲}} - \text{۱})^{\frac{۲}{۳}}\ \text{و}^{\text{لا}^{۲}-\text{۱}}\right] = \text{و}^{\text{لا}^{۲}-\text{۱}}\ \text{عف}(\text{لا}^{\frac{۳}{۲}} - \text{۱})^{\frac{۲}{۳}} + (\text{لا}^{\frac{۳}{۲}} - \text{۱})^{\frac{۲}{۳}}\ \text{عف}\ \text{و}^{\text{لا}^{۲}-\text{۱}}$$

$$= \frac{۲}{۳}(\text{لا}^{\frac{۳}{۲}} - \text{۱})^{\frac{۲}{۳}-\text{۱}} \times \frac{۳}{۲}\,\text{لا}^{\frac{۳}{۲}-\text{۱}}\ \text{و}^{\text{لا}^{۲}-\text{۱}} + (\text{لا}^{\frac{۳}{۲}} - \text{۱})^{\frac{۲}{۳}} \times \text{و}^{\text{لا}^{۲}-\text{۱}} \times ۲$$

$$= \frac{\text{لا}^{\frac{۱}{۲}}\ \text{و}^{\text{لا}^{۲}-\text{۱}}}{(\text{لا}^{\frac{۳}{۲}} - \text{۱})^{\frac{۱}{۳}}} + ۲\,(\text{لا}^{\frac{۳}{۲}} - \text{۱})^{\frac{۲}{۳}} \times \text{و}^{\text{لا}^{۲}-\text{۱}}$$

مثال (۲)　$\text{عف}\left[\text{لوک}\,(\text{۲ جم ۳لا} - \text{۵ جب لا})\right]$ کی قیمت دریافت کرو۔

$$\text{عف}\left[\text{لوک}\,(\text{۲ جم ۳لا} - \text{۵ جب لا})\right] = \frac{\text{۱}}{\text{۲ جم ۳لا} - \text{۵ جب لا}} \times \text{عف}\,(\text{۲ جم ۳لا} - \text{۵ جب لا})$$

= (− ۶ جب ۳لا − ۵ جم لا) / (۲ جم ۳لا − ۵ جب لا) = (۶ جب ۳لا + ۵ جم لا) / (۵ جب لا − ۲ جم ۳لا)

مثال (۳) ∫ مس لا فرلا اور ∫ حم لا فرلا کی قیمت دریافت کرو۔

ہمیں معلوم ہے کہ عف لوک جب لا = (۱ / جب لا) عف جب لا = جم لا / جب لا = حم لا

اور عف لوک جم لا = (۱ / جم لا) × (− جب لا) = − مس لا

∴ عف لوک قط لا = مس لا

ان نتیجوں کو تکمل کرنے سے

∫ حم لا فرلا = لوک جب لا + مستقل

اور ∫ مس لا فرلا = لوک قط لا + مستقل

= مستقل − لوک جم لا

## مشقی سوالات ۱۸

ذیل کو تفرق کرو :—

(۱) جب لا / لا (۲) لوک (لا + ما) = و^ما (۳) و^(ما^لا)

(۴) لا^لا (۵) (ما^لا)^(−لا²) (۶) لوک (۲لا³ + ۳لا − ۵)

(۷) و^(لا² + ۲) (۸) (لا^لا)^(لا²) (۹) لوک (۴لا² + ۳لا) / √(و^لا)

(۱۰) (جب لا)^(مس لا) (۱۱) (مس لا)^(مس لا) (۱۲) (قط لا)^(حم لا)

(۱۳) و^(مس^(−۱) (قط لا/۲)) (۱۴) و^(۲لا² − ۳لا) × [لوک (۴لا² + ۳)]²

ذیل کے تکملوں کی قیمت دریافت کرو :—

(۱۵) $\int \text{و}^{\text{۲لا+۳}}\ \text{فرلا}$ (۱۶) $\int \text{و}^{\text{۵لا-۱}}\ \text{فرلا}$

(۱۷) $\int (\text{۴لا+۳})\ \text{و}^{\text{۲لا}^{۲}\text{+۳لا-۴}}\ \text{فرلا}$ (۱۸) $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{۴لا+۳}}$

(۱۹) $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{۷لا-۲}}$ (۲۰) $\int \frac{(\text{۲لا+۵})\text{فرلا}}{\text{۷لا}^{۲}\text{+۵لا-۱}}$ (۲۱) $\int \left(\text{۳}+\frac{۱}{\text{۲}\sqrt{\text{لا}}}\right)\text{و}^{\text{۳لا}+\sqrt{\text{لا}}}\ \text{فرلا}$

(۲۲) $\int \frac{\text{۳ فرلا}}{\text{۷لا+۸}}$ (۲۳) $\int \frac{\text{۳لا+۷}}{\text{۴لا+۳}}\ \text{فرلا}$ (۲۴) $\int \frac{\text{۳لا}^{۲}\text{+۷لا}}{\text{۳لا}^{۲}\text{+لا-۱}}\ \text{فرلا}$

**۳٫۸ - اعلیٰ رتبہ کے تفرقی سر:—** کسی تفاعل کو تفرق کرنے سے اس کا مشتق تفاعل حاصل ہوتا ہے۔ یہ بھی بالعموم متبوع متغیر کا تفاعل ہوگا اور اس کو دوبارہ تفرق کیا جا سکتا ہے۔ مثلاً فرض کرو $\text{ما} = \text{۴لا}^{۳}$ تو $\text{عف ما} = \text{۱۲لا}^{۲}$ اور چونکہ عف ما بھی لا کا تفاعل ہے اس کو دوبارہ تفرق کرنے سے ۲۴ لا حاصل ہوگا۔ یعنی $\text{۴لا}^{۳}$ کو دو مرتبہ مسلسل تفرق کرنے سے ۲۴ لا حاصل ہوتا ہے۔ علامتوں میں اس چیز کو یوں بیان کرینگے:

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left[\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right] = \text{عف}\ (\text{عف ما}) = \text{۲۴ لا}$$

$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left[\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right]$ کو اختصاراً $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}}$ لکھتے ہیں اور اسی طرح $\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left[\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}}\right]$ کو $\frac{\text{فر}^{۳}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۳}}$ سے تعبیر کرینگے۔

دو مرتبہ تفرق کرنے کے نتیجے کو دوسرے رتبہ کا تفرقی سر کہا جاتا ہے اور ن مرتبہ مسلسل تفرق کرنے سے ن رتبہ کا تفرقی سر $\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}}}$ حاصل ہوگا۔ نیز تفرق کے عمل $\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}$ کو عف سے بھی تعبیر کیا گیا ہے۔ اس لیے دوسرے رتبے کے تفرقی سر کا عامل $\frac{\text{فر}^{۲}}{\text{فرلا}^{۲}}$ ہوگا عف (عف) یعنی $\text{عف}^{۲}$ اور اسی طرح

تیسرے چوتھے، وغیرہ رتبہ کے تفرقی سروں کے عامل ہونگے عف^۳، عف^۴ ..... عف^ن ...... یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ عامل عف الجبرا کے تین مشہور قوانین کی پابندی کرتا ہے اور عف کو الجبرا کی مقدار کی طرح استعمال کیا جا سکتا ہے۔

چونکہ غلطی کا امکان ہے اس لیے مکرر بیان کر دیا جاتا ہے کہ $\left(\frac{\text{فر ا}}{\text{فر لا}}\right)^۲$ یا (عف ا)^۲ پہلے رتبے کے تفرقی سر کا مربع ہے اور $\frac{\text{فر}^۲\text{ ا}}{\text{فر لا}^۲}$ یا عف^۲ ا دوسرے رتبہ کا تفرقی سر ہے - یہ دونوں چیزیں بالکل مختلف ہیں۔

اب اگر ف (لا) کے پہلے رتبے کے تفرق کو فَ (لا) یا ف' (لا) سے تعبیر کیا جائے تو ظاہر ہے کہ دوسرے رتبے کے تفرق کو فً (لا) یا ف'' (لا) ہے اور اسی طرح تیسرے، چوتھے رتبوں وغیرہ کے تفرقی سروں کو ف''' (لا)، ف'''' (لا) ...... سے۔

بعض سوالوں میں تفاعل کے ن رتبے کے تفرقی سر کو آسانی سے بیان کیا جا سکتا ہے اور ان کی اہم صورتیں بطور مثال کے دی جائینگی۔ باب چہارم میں اعلیٰ رتبے کے تفرقی سر اور بالخصوص دوسرے رتبے کے تفرقی سر کے علمِ ہندسہ اور عملی ریاضی میں اطلاقات بیان کیے جائینگے۔

## توضیحی مثالیں

مثال (۱) لا^ن کے ر۔ رتبے کا تفرقی سر دریافت کرو جبکہ ر < ن

عف (لا^ن) = ن لا^{ن-۱}

عف^۲ (لا^ن) = ن (ن - ۱) لا^{ن-۲}

اسی طرح عف^ر (لا^ن) = ن (ن - ۱) (ن - ۲) .... (ن - ر + ۱) لا^{ن-ر}

مثال (۲) عف^ن (جب لا) کی قیمت دریافت کرو۔

عف (جب لا) = جم لا = جب (لا + $\frac{\pi}{۲}$)

∴ عف^۲ (جب لا) = جم (لا + $\frac{\pi}{۲}$)

= جب (لا + $\frac{\pi}{۲}$ + $\frac{\pi}{۲}$) = جب (لا + $\frac{\pi\times۲}{۲}$)

$$\therefore\ \text{عف}^{3}\,(\text{جب لا}) = \text{جب}\left(\text{لا} + ۳ \times \frac{\pi}{۲}\right)$$

$$\therefore\ \text{عف}^{\text{ن}}\,(\text{جب لا}) = \text{جب}\left(\text{لا} + \frac{\text{ن}\pi}{۲}\right)$$

اسی طرح $\text{عف}^{\text{ن}}\,(\text{جم لا}) = \text{جم}\left(\text{لا} + \frac{\text{ن}\pi}{۲}\right)$

مثال (۳) $\text{عف}^{\text{ن}}\left[\text{لوک}_{\text{و}}\,(\text{ا} + \text{لا})\right]$ کی قیمت دریافت کرو۔

$$\text{عف}\left[\text{لوک}_{\text{و}}\,(\text{ا} + \text{لا})\right] = \frac{۱}{\text{ا} + \text{لا}}$$

$$\text{عف}^{۲}\left[\text{لوک}\,(\text{ا} + \text{لا})\right] = \frac{-۱}{(\text{ا} + \text{لا})^{۲}}$$

$$\text{عف}^{۳}\left[\text{لوگ}\,(\text{ا} + \text{لا})\right] = \frac{(-۱) \times (-۲)}{(\text{ا} + \text{لا})^{۳}}$$

$$\therefore\ \text{عف}^{\text{ن}}\left[\text{لوک}\,(\text{ا} + \text{لا})\right] = \frac{(-۱)(-۲) \times (-۳) \cdots (-\text{ن} + ۱)}{(\text{ا} + \text{لا})^{\text{ن}}}$$

مثال (۴) $\text{عف}^{\text{ن}}\ \text{و}^{\text{الا}}$ کی قیمت دریافت کرو۔

$$\text{عف}\ \text{و}^{\text{الا}} = \text{ا}\,\text{و}^{\text{الا}}،\quad \text{عف}^{۲}\ \text{و}^{\text{الا}} = \text{ا}^{۲}\,\text{و}^{\text{الا}}$$

اسی طرح $\text{عف}^{\text{ن}}\ \text{و}^{\text{الا}} = \text{ا}^{\text{ن}}\,\text{و}^{\text{الا}}$

مثال (۵) $\text{عف}^{\text{ن}}\left[\text{و}^{\text{الا}} \times Y\right]$ کی قیمت دریافت کرو۔ جہاں $Y$ متغیر لا کا کوئی تفاعل ہے۔

$$\text{عف}\,(\text{و}^{\text{الا}} \times Y) = \text{ا}\,\text{و}^{\text{الا}} + \text{و}^{\text{الا}}\ \text{عف}\,Y = \text{و}^{\text{الا}}\,(\text{ا} + \text{عف})\,Y$$

اور $\text{عف}^{۲}\,(\text{و}^{\text{الا}} \times Y) = \text{عف}\left[\text{و}^{\text{الا}}\,(\text{عف} + \text{ا})\,Y\right] = \text{و}^{\text{الا}}\,(\text{عف} + \text{ا})^{۲}\,Y$

اسی طرح $\text{عف}^{\text{ن}}\,(\text{و}^{\text{الا}}\,Y) = \text{و}^{\text{الا}}\,(\text{عف} + \text{ا})^{\text{ن}}\,Y$

## مشقی سوالات ۱۹

ذیل کی قیمت دریافت کرو :—

(۱) عف$^{۳}$ (۵ لا$^{۲}$ - ۷ لا + ۲) (۲) عف$^{۴}$ (۶ لا$^{۷}$ + ۷ لا$^{۵}$ - ۱۲ لا)

(۳) عف$^{۲}$ جم (۲ لا + ۳) (۴) عف$^{۳}$ (و$^{۲لا-۳}$)

(۵) عف$^{۲}$ [ و$^{۲ لوک لا}$ ] (۶) عف$^{۲}$ و$^{جب لا}$

(۷) اگر لا = ا جم (ن ت + س) + ب جب (ن ت + س)

تو ثابت کرو کہ عف$_{ت}^{۲}$ لا + ن$^{۲}$ لا = ۰

(۸) ما = و$^{۲لا}$ جم (ن لا) تو عف$^{ن}$ ما معلوم کرو

(۹) عف$^{ن}$ (جب$^{۲}$ لا) معلوم کرو۔

(۱۰) اگر لا = ج$_{۱}$ جم (لوک ما) + ج$_{۲}$ جب (لوک لا)

تو ثابت کرو کہ ما$^{۲}$ $\frac{\text{فر}^{۲}\text{لا}}{\text{فرما}^{۲}}$ + ما $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}}$ + لا = ۰

(۱۱) اگر ط = ا جم ($\sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{ل}}}$ ت + ع)

تو ثابت کرو کہ ل $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ط}}{\text{فرت}^{۲}}$ + ج ط = ۰

(۱۲) ما = لا$^{لا^{لا\cdots}}$ تو $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کی قیمت حاصل کرو۔

(۱۳) اگر ما = ج$_{۱}$ و$^{۳لا}$ + ج$_{۲}$ و$^{۴لا}$

تو ثابت کرو کہ عف$^{۲}$ ما - ۷ عف ما + ۱۲ ما = ۰

(۱۴) اگر ما = ج$_{۱}$ و$^{لا}$ + ج$_{۲}$ و$^{۳لا}$ + ج$_{۳}$ و$^{-۴لا}$

تو ثابت کرو کہ عف$^{۳}$ ما - ۱۳ عف ما + ۱۲ ما = ۰

ذیل کی قیمت دریافت کرو :-

(۱۵) $\frac{\text{فر}^{ن}}{\text{فرلا}^{ن}}$ ($\frac{۲}{\text{لا} + ۳}$) (۱۶) عف$^{ن}$ [لوک (۲ لا - ۳)]

(۱۷) عف$^{ن}$ (لا$^{۳}$ و$^{۲لا}$) (۱۸) عف (جب لا)$^{جم لا}$

(۱۹) عف (جب لا)$^{\text{مس لا}}$　　(۲۰) عف$^{6}$ (لا و$^{\text{لا}}$)

(۲۱) $\iint$ لا$^{2}$ فرلا فرلا　　(۲۲) $\iint$ (لا$^{2}$ − ۳ لا + ۱) فرلا فرلا

(۲۳) $\iint$ جب لا فرلا فرلا　　(۲۴) $\iint$ مر فرت فرت

(۲۵) $\iint \frac{1}{(\text{لا} - 3)^{4}}$ فرلا فرلا　　(۲۶) $\iiint \frac{5}{(2\text{لا} + 7)^{3}}$ فرلا فرلا فرلا

**۳٫۹ - جزوی مشتق** :- اب تک ہم نے ایسے تفاعلوں پر غور کیا جن میں متغیروں کی تعداد دو ہے۔ ظاہر ہے کہ ان دو متغیروں میں سے کسی ایک کو کوئی بھی قیمت دے دیں تو دوسرے کی قیمت متعین ہو جاتی ہے۔ اس لیے اول الذکر کو متبوع متغیر اور موخر الذکر کو تابع متغیر کہتے ہیں۔ اب اگر تفاعل میں دو سے زیادہ متغیر ہوں فرض کرو تین ہوں تو دو متغیروں کو آزادانہ کچھ بھی قیمت دینے سے تیسرے متغیر کی قیمت معلوم ہو جاتی ہے۔ اس لیے ایسے تفاعل میں دو متغیروں کو متبوع متغیر اور ایک کو تابع متغیر کہتے ہیں۔ برخلاف اس کے اگر تین متغیروں میں دو رشتے ہوں تو الجبرا سے حل کر کے کسی دو متغیروں کو علٰحدہ علٰحدہ ایک متغیر کی رقوم میں دو رشتوں سے بیان کیا جا سکتا ہے۔ اس لیے اس میں دراصل ایک ہی متبوع متغیر ہے اور دو تابع متغیر ہیں۔ اور ظاہر ہے کہ متبوع متغیر کی قیمت میں فرق کی وجہ سے دونوں تابع متغیروں کی قیمتوں میں فرق ہوگا اور ان سے دونوں تابع متغیروں کے تفرقی سر حاصل ہو جائینگے۔ لیکن اگر کسی تفاعل میں دو متبوع متغیر ہوں اور ایک تابع متغیر ہو فرض کرو کہ ی = ف (لا، ما) تو چونکہ لا اور ما متبوع متغیر ہیں اس لیے لا کی قیمت کے فرق کا ما کی قیمت پر کوئی اثر نہیں پڑتا اور برعکس اس کے۔ صرف لا کی قیمت کے فرق سے ی کی قیمت میں فرق آتا ہے اور اسی طرح صرف ما کی قیمت کے فرق سے۔ لا کے اس قسم کے فرق کو جزوی فرق کہتے ہیں اور علامت میں جف سے اختصار کرتے ہیں۔

پس　ی + جف ی = ف (لا + جف لا، ما) جہاں ما کی قیمت میں کوئی فرق واقع نہیں ہوا۔ اب اگر $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{ف (لا + جف لا، ما) - ف (لا، ما)}}{\text{جف لا}}$ کی انتہا وجود رکھتی ہے جبکہ جف لا ← ۰ تو کہتے ہیں کہ ی بلحاظ لا کے جزوی تفرق پذیر ہے اور $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}$ کو ی کا بلحاظ لا پہلے رتبے کا جزوی مشتق کہتے ہیں۔

اسی طرح $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = \underset{\text{جف ما} \to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{ف (لا، ما + جف ما) - ف (لا، ما)}}{\text{جف ما}}$ وجود رکھتا ہو تو $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}$ کو ی کا بلحاظ ما جزوی مشتق کہتے ہیں۔ دفعہ ۸ر۳ سے ظاہر ہے کہ پہلے رتبے کے جزوی مشتق بھی بالعموم لا اور ما کے تفاعل ہونگے اور انہیں پھر لا اور ما کے لحاظ سے جزواً تفرق کیا جا سکتا ہے۔ سادہ تفرقی سروں کی ترقیم کے مطابق دوسرے رتبے کے جزوی مشتق ہونگے۔

$$\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\left(\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}\right) = \frac{\text{جف}^2\text{ ی}}{\text{جف لا}^2}،\quad \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\left(\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}\right) = \frac{\text{جف}^2\text{ ی}}{\text{جف ما}^2}$$

اور

$$\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\left(\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}\right) = \frac{\text{جف}^2\text{ ی}}{\text{جف لا جف ما}} \text{ اور } \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\left(\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}\right) = \frac{\text{جف}^2\text{ ی}}{\text{جف ما جف لا}}$$

اسی طرح تیسرے اور اعلیٰ رتبے کے جزوی مشتقات۔ چند شرائط کے تحت جو اکثر سوالات میں پوری ہوتی ہیں بلحاظ لا اور ما دوسرے رتبے کے جزوی مشتق میں ترتیب تفرق کو باہم بدلا جا سکتا ہے۔ یعنی

$$\frac{\text{جف}^2\text{ ی}}{\text{جف لا جف ما}} = \frac{\text{جف}^2\text{ ی}}{\text{جف ما جف لا}}$$

اگلے باب میں جزوی مشتقوں کی ہندسی تعبیر بتائی جائیگی۔

# توضیحی مثالیں

مثال (۱) ۲لا + ۳ما − ی = ۵ تین ابعاد میں ایک مستوی کو تعبیر کرتا ہے۔ $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}$ اور $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}$ کی قیمت دریافت کرو۔

$$\text{ی} = ۲\text{لا} + ۳\text{ما} - ۵$$

$$\therefore \quad \frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = ۲ \quad \text{اور} \quad \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = ۳$$

مثال (۲) :— اگر ی = ۲لا$^{۲}$ + ۳ لا ما + ۵ما$^{۲}$ − ۶لا + ۷ما

تو $\frac{\text{جف}^{۲}\text{ ی}}{\text{جف لا}^{۲}}$ ، $\frac{\text{جف}^{۲}\text{ ی}}{\text{جف لا جف ما}}$ اور $\frac{\text{جف}^{۲}\text{ ی}}{\text{جف ما}^{۲}}$ کی قیمت دریافت کرو۔

$$\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = ۴\text{لا} + ۳\text{ما} - ۶ \quad \text{اور} \quad \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = ۳\text{لا} + ۱۰\text{ما} + ۷$$

اس لیے $\frac{\text{جف}^{۲}\text{ ی}}{\text{جف لا}^{۲}} = ۴$ ، $\frac{\text{جف}^{۲}\text{ ی}}{\text{جف ما}^{۲}} = ۱۰$ اور $\frac{\text{جف}^{۲}\text{ ی}}{\text{جف لا جف ما}} = \frac{\text{جف}^{۲}\text{ ی}}{\text{جف ما جف لا}} = ۳$

# مشقی سوالات ۲۰

(۱) کرہ لا$^{۲}$ + ما$^{۲}$ + ی$^{۲}$ = ا$^{۲}$ میں $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}$ ، $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}$ کی قیمت دریافت کرو۔ نیز دوسرے رتبے کے جزوی مشتقوں کی قیمت دریافت کرو۔

(۲) اگر ی = لا$^{\text{ما}}$ تو $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}$ اور $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}$ کی قیمت دریافت کرو۔

(۳) ی = جب$^{-۱}$ $\frac{\text{لا}}{\text{ما}}$ سے $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}$ اور $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}$ اور دوسرے رتبے کے جزوی مشتقات کی قیمت معلوم کرو۔

(۴) د = (ا لا$^{۲}$ + ب ما$^{۲}$ + ج ی$^{۲}$)$^{ن}$ سے $\frac{\text{جف د}}{\text{جف ی}}$ کی قیمت معلوم کرو۔

(۵) اگر ی = ۲ لا$^{۳}$ ما$^{۲}$ − ۳ لا ما$^{۴}$ + ۴ لا$^{۲}$ ما$^{۳}$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{لا}\,\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} + \text{ما}\,\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = \text{۵ ی}$$

(۶) اگر د = ق$^{\text{لا}}$ جب ما + ق$^{\text{ما}}$ جب لا تو $\left(\frac{\text{جف د}}{\text{جف لا}}\right)^{۲} + \left(\frac{\text{جف د}}{\text{جف ما}}\right)^{۲}$ کی قیمت معلوم کرو۔

(۷) اگر د = لوک (لا$^{۳}$ + ما$^{۳}$ + ی$^{۳}$ − ۳ لا ما ی)

تو $\frac{\text{جف د}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف د}}{\text{جف ما}} + \frac{\text{جف د}}{\text{جف ی}}$ کی قیمت حاصل کرو۔

(۸) اگر د = لوک (مس لا + مس ما + مس ی) تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب۲لا}\,\frac{\text{جف د}}{\text{جف لا}} + \text{جب۲ما}\,\frac{\text{جف د}}{\text{جف ما}} + \text{جب۲ی}\,\frac{\text{جف د}}{\text{جف ی}} = ۲$$

# باب سوم پر متفرق سوالات

ذیل کے تفاعلوں کو تفرق کرو :—

(۱) (لا$^{۳}$ + ۳ لا$^{۲}$ − ۱)$^{۵}$ (۲) $\frac{(\text{لا}^{۳} - ۱)^{۲}}{\text{۵ لا}^{۲} + \text{۳ لا} - ۱}$

(۳) جب $\left(\frac{\text{۲ لا} + ۳}{\text{لا} - ۱}\right)$ (۴) مس $\left(\frac{۱}{\text{لا} - ۱}\right)$

(۵) جب$^{-۱}$ $\left(\sqrt{۱ - \text{۲ لا}^{۲}}\right)$ (۶) جم$^{-۱}$ $\left(\frac{\text{۲ لا}}{\sqrt{۱ - \text{۳ لا}^{۲}}}\right)$

(۷) مس$^{-۱}$ $\left(\frac{\text{۷ لا}^{۲}}{\text{۲ لا}^{۲} - ۱}\right)$ (۸) قم$^{-۱}$ $\frac{۱}{\text{۲ ا}}$

(۹) $\text{لوک}\left(\text{جب}\,\frac{\text{طہ}}{۲}\right)$　　(۱۰) $\frac{\text{لا}}{۱+\text{لوک لا}}$

(۱۱) $\text{لوک}\sqrt{\frac{۱-\text{جب طہ}}{۱+\text{جب طہ}}}$　　(۱۲) $\text{لا}^{۳}\,\text{و}^{۲-۳\text{لا}^{۲}}$

(۱۳) $\frac{(\text{لا}+۲)\,(\text{لا}-۳)}{(\text{لا}+۴)\,(\text{لا}-۵)}$　　(۱۴) $\text{لا}+\text{جب}^{-۱}\frac{\text{ما}}{\text{لا}}=۰$

(۱۵) $\frac{\text{لا}^{۲}}{۵}+\frac{\text{ما}^{۲}}{۹}=۱$　　(۱۶) $\text{جب لا}\ \text{و}^{\text{مس لا}}$

(۱۷) $\text{و}^{\text{جب}^{۲}\text{لا}}\times\text{مس لا}$　　(۱۸) $\frac{\text{و}^{\text{لا}}+\text{و}^{-\text{لا}}}{۲}$

(۱۹) $\frac{\text{و}^{\text{لا}}-\text{و}^{-\text{لا}}}{۲}$　　(۲۰) $\frac{\text{و}^{\text{لا}}-\text{و}^{-\text{لا}}}{\text{و}^{\text{لا}}+\text{و}^{-\text{لا}}}$

(۲۱) $(\text{جب}^{-۱}\text{لا})^{\text{مس لا}}$　　(۲۲) $(\text{قم}^{-۱}\text{لا})^{\text{جب لا}}$

ذیل کے تکملوں کی قیمت دریافت کرو :-

(۲۳) $\int\frac{۲\text{لا}+۳}{۴\text{لا}^{۲}+۳}\,\text{فرلا}$　　(۲۴) $\int\frac{۲\text{لا}+۱}{(۳\text{لا}^{۲}+۳\text{لا}-۵)^{۲}}\,\text{فرلا}$

(۲۵) $\int\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{۲}+۴\text{لا}+۱۲}$　　(۲۶) $\int\text{لا}\,\text{و}^{۳\text{لا}^{۲}}\,\text{فرلا}$

(۲۷) $\int\frac{\text{فرلا}}{\sqrt{۳-۷\text{لا}^{۲}}}$　　(۲۸) $\int\frac{\text{فرلا}}{\sqrt{۵\text{لا}-۴\text{لا}^{۲}}}$

(۲۹) $\int\frac{\text{لا فرلا}}{\text{لا}^{۴}+۵}$　　(۳۰) $\int\frac{\text{ص فرص}}{۵\text{ص}^{۴}+۳}$

(۳۱) $\int\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}\sqrt{۵\text{لا}^{۲}-۳}}$　　(۳۲) $\int\frac{\text{فرس}}{\text{س}\sqrt{۴\text{س}^{۲}-۱}}$

(۳۳) $\int\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}\sqrt{۵\text{لا}^{۲}-۴}}$　　(۳۴) $\int\frac{\text{فرلا}}{۲\text{لا}^{۲}+۷\text{لا}+۱۱}$

(۳۵) $\int\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{۲}-۱}$　　(۳۶) $\frac{\text{فرلا}}{(\text{لا}+۲)(\text{لا}+۳)}$

(۳۷) ∫ لا فرلا / (لا + ۱)(لا+۳)

(۳۸) ∫ مس (۲ لا + ۳) فرلا

(۳۹) ∫ قط (لا - ۳) فرلا

(۴۰) ∫ فرما / √(۲ ما - ۳ ما$^{۲}$)

ذیل کی قیمت دریافت کرو :-

(۴۱) عف$^{۷}$ (لا$^{۳}$ و$^{۲لا}$)

(۴۲) عف$^{۵}$ (جم ۳ لا)

(۴۳) عف$^{۶}$ (۲ / (۳ - لا))

(۴۴) عف$^{ن}$ (جب ۲ لا)

(۴۵) عف$^{۲}$ [و$^{لا}$ جب (لا$^{۲}$)]

(۴۶) عف$^{۲}$ [مم$^{۳}$ (لوک لا)]

(۴۷) عف$^{۳}$ (و$^{قط^{-۱} ۲ط}$)

(۴۸) عف$^{۲}$ (مس مقلوب ا$^{لا}$)

(۴۹) عف [(۱ - ۳لا$^{۲}$) و$^{۱/لا}$]

(۵۰) عف [ (م + لا) / (۱ + م$^{۲}$) · و$^{م مس^{-۱} لا}$ / √(۱ + لا$^{۲}$) ]

(۵۱) عف$^{۲}$ [لوک √((ا$^{۲}$ - ب لا$^{۲}$)$^{ن}$)]

ذیل کی مساواتوں میں پہلے اور دوسرے رُتبے کے جزوی مشتقوں کی قیمتیں دریافت کرو۔ تابع متغیر واضح نہ ہونے کی صورت میں بتا دیا گیا ہے -

(۵۲) لا$^{۲}$/ا$^{۲}$ + ما$^{۲}$/ب$^{۲}$ + ی$^{۲}$/ج$^{۲}$ = ۱ (تابع متغیر ی)

(۵۳) ۲ لا$^{۲}$ + ۳ ما$^{۲}$ - ی$^{۲}$ = ۱ (تابع متغیر ی)

(۵۴) ۲ ی = لا$^{۲}$/۲ - لا ما/۳ + ۲ ما$^{۲}$/۵

(۵۵) ی = جب$^{-۱}$ لا + جب$^{-۱}$ ما

(۵۶) ی = جم$^{-۱}$ (لا ما / (لا$^{۲}$ + ما$^{۲}$))

(۵۷) ء = لوک (لا$^{2}$ + ما$^{2}$ + ی$^{2}$) − لوک (لا ما ی)

(۵۸) ء = و$^{لا^{2} + ما^{2} + ی^{2}}$ (۵۹) ی = و$^{لا+ما}$ لوک (لا$^{2}$ + ما$^{2}$)

(۶۰) اگر ی = ۳ لا$^{4}$ ما$^{3}$ + ۲ لا$^{3}$ ما$^{4}$ − لا$^{2}$ ما$^{5}$ − ۷ لا ما$^{6}$ تو ثابت کرو کہ

$$لا \frac{جف\ ی}{جف\ لا} + ما \frac{جف\ ی}{جف\ ما} = ۷\ ی$$

ذیل کے تفاعلوں میں تصدیق کرو کہ دونوں متبوع متغیروں کے دوسرے رتبے کے جزوی مشتق میں ترتیب تفرق سے کوئی فرق واقع نہیں ہوتا

یعنی
$$\frac{جف^{2}\ ف}{جف\ لا\ جف\ ما} = \frac{جف^{2}\ ف}{جف\ ما\ جف\ لا}$$

(۶۱) ی = جب (لا + ما) (۶۲) ی = $\frac{لا^{2} + ما^{2}}{لا^{2} - ما^{2}}$

(۶۳) ی = مس$^{-1}$ $\frac{لا}{ما}$ (۶۴) ء = جب$^{2}$ (ط$^{2}$ ق$^{2}$)

(۶۵) اگر ء = ۶ و$^{لا}$ ما$^{2}$ ی + ۳ و$^{ما}$ لا ی$^{2}$ + ۲ و$^{ی}$ لا$^{3}$ ما − لا ما ی

تو $\frac{جف^{3}\ ء}{جف\ لا\ جف\ ما\ جف\ ی}$ = ۱۲ (و$^{لا}$ ما + و$^{ما}$ ی + و$^{ی}$ لا)

(۶۶) اگر ء = (ما ی)$^{2}$ و$^{\frac{لا}{2}}$ + (ی لا)$^{2}$ و$^{\frac{ما}{2}}$ + (لا ما)$^{2}$ و$^{\frac{ی}{2}}$

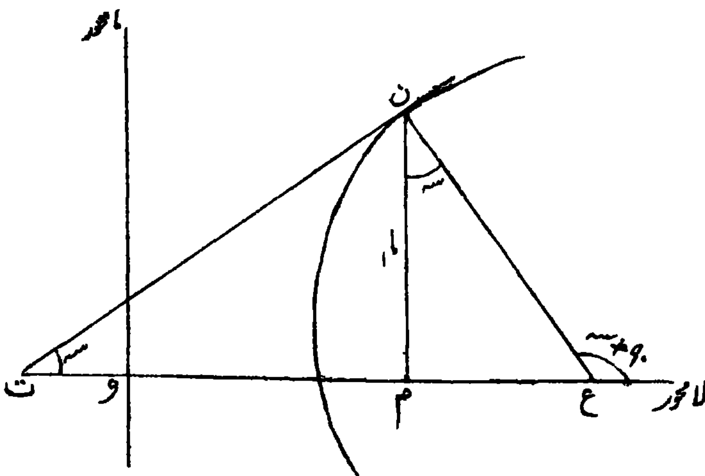
تو $\frac{جف^{6}\ ء}{جف\ لا^{2}\ جف\ ما^{2}\ جف\ ی^{2}}$ = و$^{\frac{لا}{2}}$ + و$^{\frac{ما}{2}}$ + و$^{\frac{ی}{2}}$

# باب چہارم

## تفرقی سر کے اطلاقات

۱؍۴ :- گذشتہ باب میں تفرق اور تکمل کرنے کا عمل بتایا گیا ہے اور یہ بھی بتایا گیا ہے کہ علم ہندسہ میں تفرقی سر منحنی کے ڈھال کو تعبیر کرتا ہے اور طبیعی سوالوں میں بدلنے کی شرح کو۔ اس باب میں اس تعبیر کی وجہ سے ہندسی اور طبیعی سوالوں کے حل کرنے میں جس قدر سہولتیں ہوتی ہیں ان کا کچھ ذکر کیا جائیگا۔ مضامین احصائی ہندسہ اور طبیعیاتی ریاضی کا پورا دار و مدار تفرقی سر پر ہے۔

۲؍۴ :- منحنی کا ڈھال، مماس اور عماد کی مساواتیں، وغیرہ :-



شکل میں نقطہ ن (لا۱، ما۱) پر منحنی کا مماس ن ت دکھایا گیا ہے۔ یہ لا محور سے نقطہ ت پر ملتا ہے اور لا محور کی مثبت سمت سے زاویہ سہ بناتا ہے۔ ہمیں معلوم ہے کہ مس سہ = $\left(\frac{\text{فرما}_1}{\text{فرلا}_1}\right)$ جبکہ $\frac{\text{فرما}_1}{\text{فرلا}_1}$ میں نقطہ ن کے محدد درج کر دیے گئے ہیں۔ اس امر کو علامتوں میں $\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)_{\text{لا}=\text{لا}_1}$ یا $\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)_{\text{لا}_1\text{ما}_1}$ یا $\left(\frac{\text{فرما}_1}{\text{فرلا}_1}\right)$ سے تعبیر کرتے ہیں اور مس سہ یا $\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)_{\text{لا}_1\text{ما}_1}$ کو نقطہ ن پر منحنی کا ڈھال کہتے ہیں۔
تحلیلی ہندسہ سے طالب علم کو معلوم ہے کہ مماس ن ت کی مساوات ہوگی

$$(\text{ما} - \text{ما}_1) = \text{مس سہ} \times (\text{لا} - \text{لا}_1)$$

$$= \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)_{\text{لا}_1\text{ما}_1} \times (\text{لا} - \text{لا}_1)$$

اسی طرح عماد ن ع کی مساوات ہوگی $(\text{ما} - \text{ما}_1) = -\text{مم سہ} \times (\text{لا} - \text{لا}_1)$

$$= -\frac{1}{\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)_{\text{لا}_1\text{ما}_1}} (\text{لا} - \text{لا}_1)$$

یعنی $(\text{ما} - \text{ما}_1)\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)_{\text{لا}_1\text{ما}_1} + (\text{لا} - \text{لا}_1) = 0$

اب نقاط ت اور ع کے محدد دریافت کرنے کے لیے مماس اور عماد کی مساواتوں میں ما = ۰ رکھو تو ت کے محدد ہونگے $\left(\text{لا}_1 - \frac{\text{ما}_1}{\left(\frac{\text{فرما}_1}{\text{فرلا}_1}\right)} ، 0\right)$ اور ع کے محدد ہونگے

$$\left[\text{لا}_1 - \text{ما}_1 \left(\frac{\text{فرما}_1}{\text{فرلا}_1}\right) ، 0\right]$$

ن ت کو مماس کا طول اور ن ع کو عماد کا طول کہتے ہیں۔ شکل سے ظاہر ہے کہ

مماس کا طول ن ت = ن م × قم سہ = ما۱ قم سہ

$$= \text{ما}_1 \times \sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{\text{فرما}_1}{\text{فرلا}_1}\right)^2}} = \text{ما}_1 \times \sqrt{1 + \left(\frac{\text{فرلا}_1}{\text{فرما}_1}\right)^2}$$

اور عماد کا طول ن ع = ن م قطسہ = ما قطسہ = ما × $\sqrt{1 + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^{2}}$

مماس اور عماد کے لا محور پر ظلوں کو بالترتیب زیر مماس اور زیر عماد کہتے ہیں۔

پس زیر مماس م ت = ن م × مم سہ = ما مم سہ = $\frac{\text{ما}}{\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)}$ = ما $\left(\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}}\right)$

اور زیرِ عماد م ع = ن م × مس سہ = ما مس سہ = ما $\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)$

مثال (۱)۔ مکافی ما = ۲ لا - لا$^{2}$ کے مماس کا ڈھال مبداء اور لا = $\frac{3}{2}$ والے نقطوں پر دریافت کرو۔ نیز بتاؤ کن نقطوں پر مماس لا محور سے ۴۵° کا زاویہ بناتا ہے اور کہاں لا محور کے متوازی ہے۔

ما = ۲ لا - لا$^{2}$

تفرق کرنے سے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ = ۲ - ۲ لا

اس لیے مبداء پر ڈھال = ۲ اور لا = $\frac{3}{2}$ والے نقطے پر ڈھال = -۱

نیز اگر مماس ۴۵° کا زاویہ بناتا ہے تو ڈھال = مس ۴۵° = ۱

∴ ۱ = ۲ - ۲ لا ∴ لا = $\frac{1}{2}$

∴ نقطہ ($\frac{1}{2}$، $\frac{3}{4}$) پر مماس لا محور سے ۴۵° کا زاویہ بنائیگا۔

اور لا محور سے متوازی ہونے کے لیے ڈھال = مس ۰ = ۰ = ۲ - ۲ لا ∴ لا = ۱

اور نقطہ (۱، ۱) پر منحنی کا مماس لا محور کے متوازی ہوگا۔

مثال (۲)۔ مکافی ما$^{2}$ = ۴ لا - ۵ کے کسی نقطہ پر منحنی کا ڈھال اور مماس، عماد، زیر مماس اور زیر عماد کے طول دریافت کرو۔

تفرق کرنے سے ۲ ما $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ = ۴ ∴ $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{2}{\text{ما}}$

اس لیے کسی نقطہ پر ڈھال $\frac{2}{\text{ما}}$ ہے اور زاویہ مماس مس$^{-1}\left(\frac{2}{\text{ما}}\right)$

مماس کا طول $= \text{ما} \times \sqrt{1 + \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}}\right)^2} = \text{ما} \times \sqrt{1 + \frac{\text{ما}^2}{4}}$

اور عماد کا طول $= \text{ما} \times \sqrt{1 + \frac{4}{\text{ما}^2}} = \sqrt{\text{ما}^2 + 4}$

زیر مماس کا طول $= \text{ما} \times \frac{\text{ما}}{2} = \frac{\text{ما}^2}{2}$

زیر عماد کا طول $= \text{ما} \times \frac{2}{\text{ما}} = 2$

مثال (۳)۔ وہ منحنی دریافت کرو جس کے زیر مماس کا طول فصلہ کے متناسب ہو۔

منحنی کی تفرقی مساوات حاصل کرنے کے لیے $\text{ما} \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} \propto \text{لا}$

فرض کرو کہ $\text{ما} \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = \text{ا} \,\text{لا}$ جہاں ا دیا ہوا مستقل ہے۔

تو $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} = \int \text{ا} \frac{\text{فرما}}{\text{ما}}$ اور تکمل کرنے سے

$\text{لوک لا} = \text{ا لوک ما} + \text{مستقل}$

$\therefore \text{لا} = \text{ج ما}^{\text{ا}}$ جہاں ج اختیاری مستقل ہے۔ بالخصوص اگر ا کی قیمت (۔۱) ہو تو یہ منحنی قائم زائد ہو گا۔

مثال (۴)۔ وہ منحنی دریافت کرو جس کے زیر عماد کا طول ا کے مساوی ہے اور جو مبدا میں سے گزرتا ہے۔ ایسے منحنیوں کی تفرقی مساوات ہو گی۔

$$\text{ما} \sqrt{1 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2} = \text{ا}$$

$$\therefore 1 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2 = \frac{\text{ا}^2}{\text{ما}^2}$$

$$\therefore \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \pm \sqrt{\frac{\text{ا}^2 - \text{ما}^2}{\text{ما}^2}}$$

$$\therefore \pm \int \frac{\text{ما فرما}}{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{ما}^2}} = \int \text{فرلا}$$

اور تکمل کرنے سے $\mp \sqrt{\text{ر}^2 - \text{ما}^2} = \text{لا} + \text{ج}$ جہاں ج اختیاری مستقل ہے۔

اب مربع لینے سے $\text{ما}^2 + (\text{لا} + \text{ج})^2 = \text{ر}^2$ جو دائروں کو تعبیر کرتا ہے۔

اب ج کی قیمت دریافت کرنے کے لیے ہمیں معلوم ہے کہ دائرہ مبداء میں سے گزرتا ہے۔

اس لیے $\cdot + (\cdot + \text{ج})^2 = \text{ر}^2$ یعنی $\text{ج} = \pm \text{ر}$

یعنی $\text{ما}^2 + (\text{لا} \pm \text{ر})^2 = \text{ر}^2$ مطلوبہ دائرہ ہے۔

# مشقی سوالات ۲۱

(۱) منحنی $\text{ما} = \text{لا}^3 - ۳\,\text{لا}^2 + ۷\,\text{لا} + ۱$ کے نقاط $\text{لا} = ۱، \frac{۳}{۲}$ اور ۲ پر منحنی کا ڈھال اور مماس کا لا محور سے زاویہ سہ دریافت کرو۔

(۲) منحنی $(۱ + \text{لا}^2)\,\text{ما} - \text{لا} = \cdot$ کا ڈھال اور سہ کی قیمت مبداء پر دریافت کرو۔

(۳) بتاؤ کہ منحنی $\text{ما}^2 - ۲\,\text{لا}^3 = \cdot$ کے کس نقطہ پر ڈھال ۳ ہے نیز کس نقطہ پر سہ $= ۴۵^\circ$

(۴) بتاؤ کہ کن نقطوں پر منحنی $\text{ما} + ۳\,\text{لا}^2 = \text{لا}^3 - ۹\,\text{لا} + ۵$ کا مماس محور لا کے متوازی ہے۔

(۵) ذیل کے منحنیوں کے دیے ہوئے نقطوں پر مماس اور عماد کی مساواتیں اور زیر مماس اور زیر عماد کا طول محسوب کرو۔

(ا) $\text{لا}^2 + ۴\,\text{ما}^2 = ۲۵$ کے نقطہ (۳، ۲) پر

(ب) $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ر}^2$ کے نقطہ (رجم طہ، رجب طہ) پر

(ج) $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ کے نقطہ $\left(\frac{\text{ا}}{\sqrt{۲}}، \frac{\text{ب}}{\sqrt{۲}}\right)$ پر

(۶) $\text{ما}^2 = ۸\,\text{لا}$ کے نقطہ (۲، ۴) پر کے مماس، عماد اور محور لا سے جو مثلث

بنتا ہے اس کا رقبہ دریافت کرو۔

(۷) ما = لا۳ کے نقطہ (۳، ۲۷) پر کے مماس اور حوالے کے محوروں سے جو مثلث بنتا ہے اس کا رقبہ دریافت کرو۔

(۸) ما = لا۲ - ۵ لا + ۷ کے ان نقاط پر کے مماسوں کا نقطۂ تقاطع دریافت کرو جن کے فصلے بالترتیب - ۲ اور ۳ ہیں۔

(۹) ما = لا۲ - ۴ لا + ۱ کے ان نقاط پر کے مماسوں کا درمیانی زاویہ معلوم کرو جن کے فصلے بالترتیب ۱ اور ۳ ہیں۔

(۱۰) ما = لا۳ - ۲ لا۲ + لا - ۲ کے کتنے مماس خط ۷ لا - ۴ ما + ۲۸ = ۰ کے متوازی ہیں، ان کی مساواتیں معلوم کرو۔

(۱۱) لا۲ + لا ما + ما۲ = ۴ کے افقی اور انتصابی مماسوں کے نقاطِ تماس معلوم کرو۔

(۱۲) ۴ لا۲ - ما۲ = ۳۶ کے ان مماسوں کی مساواتیں معلوم کرو جو ۲ لا + ۵ ما = ۴ پر علی القوائم ہیں۔

(۱۳) ناقص لا۲/ل۲ + ما۲/ب۲ = ۱ پر وہ نقطہ معلوم کرو جس کا مماس محورِ اعظم اور محورِ اصغر کے سروں کو ملانے والے خط کے متوازی ہے۔

(۱۴) ما۲ = ۲ ع لا میں ثابت کرو کہ زیر عماد کی تنصیف راس پر ہوتی ہے اور زیر عماد کا طول ع ہے۔

(۱۵) وہ منحنیات دریافت کرو جن کا (ا) زیر مماس کا طول مستقل ہے۔

(ب) زیر عماد کا طول مستقل ہے۔

(ج) مماس کا طول مستقل ہوتا ہے۔

(د) عماد کا طول مستقل ہوتا ہے۔

(۱۶) ثابت کرو کہ ما = ۲ لا - ا منحنی ما = لا۴ + ۲ لا۳ - ۳ لا۲ - ۲ لا + ۳ کو دو علیحدہ علیحدہ نقاط پر مس کرتا ہے۔

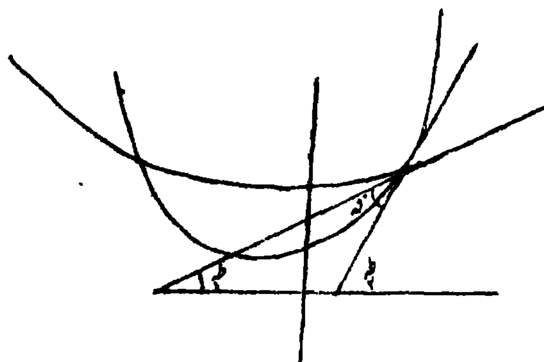
(۱۷) ثابت کرو کہ ما = ۳ لا - ۱ منحنی ما = لا۳ - لا + ۱ کا مماس ہے۔

(۱۸) ثابت کرو کہ خط $\frac{لا}{و} + \frac{ما}{ب} = ۲$ منحنی $(\frac{لا}{و})^{ن} + (\frac{ما}{ب})^{ن} = ۲$ کو ن کی ہر قیمت کے لیے نقطہ (و، ب) پر مس کرتا ہے۔

(۱۹) منحنی ما = ب جب $\frac{لا}{و}$ میں ثابت کرو کہ زیر مماس = و مس $\frac{لا}{و}$ اور زیر عماد $\frac{ب^{۲}}{۲و}$ جب $\frac{۲لا}{و}$ اور عماد کا طول ب جب $\frac{لا}{و} \times \sqrt{۱ + \frac{ب^{۲}}{و^{۲}} جم^{۲} \frac{لا}{و}}$ ہے۔

(۲۰) بتاؤ کہ منحنی ما = ۴ $لا^{۲}$ − ۵ لا + ۱۲ اور ۳ $لا^{۲}$ = ۷ لا + ما − ۱۵ ایک دوسرے کو کن نقطوں پر کاٹتے ہیں اور ان نقطوں پر دونوں منحنیوں کے مماسوں میں کیا زاویہ ہے۔

منحنی ما = ۴ $لا^{۲}$ − ۵ لا + ۱۲ اور ۳ $لا^{۲}$ = ۷ لا + ما − ۱۵ میں سے ما ساقط کردو یعنی ایک مساوات سے ما کی قیمت نکال کر دوسری مساوات میں درج کردو۔




پس ۳ $لا^{۲}$ = ۷ لا + (۴ $لا^{۲}$ − ۵ لا + ۱۲) − ۱۵

= ۷ لا + ۴ $لا^{۲}$ − ۵ لا + ۱۲ − ۱۵

∴ $لا^{۲}$ + ۲ لا − ۳ = ۰ ∴ (لا + ۳)(لا − ۱) = ۰

∴ لا = −۳، ۱

اس لیے نقاطِ تقاطع کے محدد ہیں (۱، ۱۱) اور (−۳، ۶۳)

شکل میں دو منحنی دکھائے گئے ہیں۔ ان کے مماس بالترتیب لا محور سے زاویہ طہ$_۱$ اور طہ$_۲$ بناتے اور نقطۂ تقاطع پر مماسوں کے درمیان زاویہ فہ ہے۔

ظاہر ہے کہ فہ = طہ$_۲$ - طہ$_۱$

$$\therefore \text{مس فہ} = \text{مس}(\text{طہ}_۲ - \text{طہ}_۱) = \frac{\text{مس طہ}_۲ - \text{مس طہ}_۱}{۱ + \text{مس طہ}_۲ \text{ مس طہ}_۱}$$

اب مس طہ$_۱$ اور مس طہ$_۲$ کی قیمتیں معلوم ہیں اور اس سے مس فہ کی قیمت نکل سکتی ہے۔

اس سوال میں پہلے منحنی کے لیے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۸\text{لا} - ۵$$ اور نقاطِ تقاطع پر اس کی قیمت ہے ۳ اور -۲۹

دوسرے منحنی کے لئے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۶\text{لا} - ۷$$ اور نقاطِ تقاطع پر اس کی قیمت ہے -۱ اور -۲۵

پس نقطہ (۱، ۱۱) پر مماسوں کے درمیان زاویہ فہ$_۱$ ہے

$$\text{مس فہ}_۱ = \frac{(-۱) - ۳}{۱ + (۳)(-۱)} = \frac{-۴}{۱ - ۳} = +۲$$

اور نقطہ (-۳، ۶۳) پر مماسوں کے درمیان زاویہ فہ$_۲$ ہے

$$\text{مس فہ}_۲ = \frac{-۲۵ - (-۲۹)}{۱ + (-۲۹)(-۲۵)} = \frac{+۴}{۷۲۶}$$

واضح رہے کہ مماسوں کے درمیان زاویہ فہ یا ۱۸۰ - فہ لیا جا سکتا ہے۔
اس لیے علامت کا تعین بغیر ترسیم کھینچے نہیں ہو سکتا۔

(۲۱) ذیل کے منحنیوں کے تقاطع کے زاویے محسوب کرو:-

(ا) لا$^۲$ + ما$^۲$ - ۴ لا = ۱ اور لا$^۲$ + ما$^۲$ - ۲ ما = ۹

(ب) ۴ ما = ۲ لا$^۲$ - ۳ لا اور ۲ ما = لا$^۲$ + ۴

(ج) لا$^۲$ + ما$^۲$ = ۴۵ اور ما$^۲$ = ۱۲ لا

(۲۲) ثابت کرو کہ لا$^۲$ - ما$^۲$ = ۵ اور ۴ لا$^۲$ + ۹ ما$^۲$ = ۷۲ علی القوائم

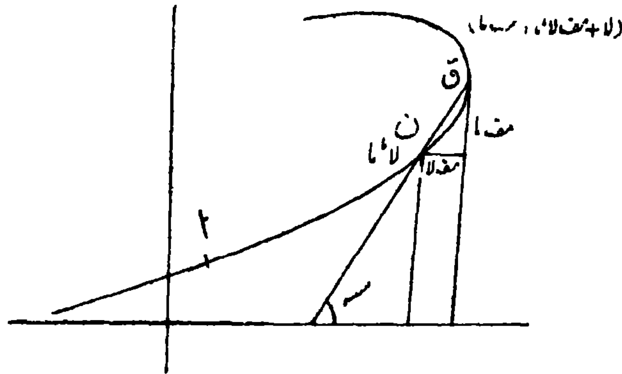
قطع کرتے ہیں ۔

(۲۳) ثابت کرو کہ $\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} = 8\,\text{ر}\,\text{لا}$ اور $\text{ما}^{2} = \frac{\text{لا}^{3}}{2\,\text{ر} - \text{لا}}$ ایک دوسرے کو مبداء پر علی القوائم قطع کرتے ہیں اور دوسرے دو نقطوں پر °۴۵ کے زاویہ پر قطع کرتے ہیں ۔

## ۴٫۲۵ :- منحنی کے قوس کا طول :-

ایک سیدھے خط کے طول کے مفہوم سے طالب علم خوب واقف ہے ۔ لیکن منحنی کے قوس کا طول اس قدر آسان نہیں ہے ۔ اس کی ایک تعریف یوں ہو سکتی ہے کہ منحنی کے قوس کو چھوٹے چھوٹے قوسوں میں تقسیم کر دیا جائے اور ان قوسوں کے وتروں کو ناپ لیا جائے ۔ تب وتروں کے طولوں کے مجموعے کی انتہا کو جب چھوٹے قوسوں کی تعداد بہت بڑھا دی جائے قوس کا طول کہینگے ۔ لیکن اس تعریف میں چند مشکلات ہیں جن کا اس ابتدائی کتاب میں ذکر نہیں ہو سکتا ۔

شکل سے واضح ہے کہ $(\text{وتر ن ق})^{2} = (\text{مف لا})^{2} + (\text{مف ما})^{2}$




اب کسی نقطہ ا سے شروع کر کے ان کے قوس کا طول س سے تعبیر ہو تو قوس ن ق کا طول مف س سے تعبیر ہو گا ۔

$$(\text{مف س})^{2} \times \left(\frac{\text{وتر ن ق}}{\text{مف س}}\right)^{2} = (\text{مف لا})^{2} + (\text{مف ما})^{2}$$

یعنی $\left(\frac{\text{مف س}}{\text{مف لا}}\right)^{۲} \times \left(\frac{\text{وترن ق}}{\text{مف س}}\right)^{۲} = ۱ + \left(\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}\right)^{۲}$

اب مف لا بے حد چھوٹا کر دیا جائے اور مذکورۂ بالا تعریف کے مطابق قوس کا طول وجود رکھتا ہو یعنی انتہا میں جبکہ مف لا ← ۰ وتر اور قوس کا طول مساوی ہو تو $\frac{\text{وترن ق}}{\text{مف س}}$ کی انتہا ایک ہو گی

اور $\left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرلا}}\right)^{۲} = ۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^{۲} = ۱ + \text{مس}^{۲}\,\text{سہ} = \text{قط}^{۲}\,\text{سہ}$

اس لیے $\text{جم سہ} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}$ اور $\text{جب سہ} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرس}}$

**مثال (۱)** منحنی $۳\,\text{ما} = \text{لا}^{۲} + ۲$ کے نقطہ (۲، ۲) پر $\frac{\text{فرس}}{\text{فرلا}}$ اور $\frac{\text{فرس}}{\text{فرما}}$ کی قیمت معلوم کرو۔

اب $\left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرلا}}\right)^{۲} = ۱ + \left(\frac{۲\,\text{لا}}{۳}\right)^{۲} = ۱ + \left(\frac{۴}{۳}\right)^{۲} = \frac{۲۵}{۹} \therefore \frac{\text{فرس}}{\text{فرلا}} = \frac{۵}{۳}$

اور $\left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرما}}\right)^{۲} = ۱ + \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}}\right)^{۲} = ۱ + \left(\frac{۳}{۲\,\text{لا}}\right)^{۲} = ۱ + \left(\frac{۳}{۴}\right)^{۲} = \frac{۲۵}{۹} \therefore \frac{\text{فرس}}{\text{فرما}} = \frac{۵}{۴}$

(۲) $\text{ما}^{۲} = ۴\,\text{الا}$ میں $\frac{\text{فرس}}{\text{فرلا}}$ اور $\frac{\text{فرس}}{\text{فرما}}$ کی قیمت معلوم کرو۔

(۳) منحنی $\text{ا}\,\text{لا}^{۲} + ۲\,\text{ھ}\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ب}\,\text{ما}^{۲} = ۱$ میں ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرلا}} = \frac{\sqrt{(\text{ھ}^{۲} - \text{اب})(\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲}) + (\text{ا} + \text{ب})}}{\text{ھ}\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{ما}}$$

(۴) $\text{لا}^{۳} + \text{ما}^{۳} = ۳\,\text{الاما}$ میں $\frac{\text{فرس}}{\text{فرما}}$ کی قیمت معلوم کرو۔

(۵) $\text{ما}^{۲} = ۲\,\text{الا}$ میں اس قوس کا طول معلوم کرو جو راس اور وترِ خاص کے سروں کے درمیان ہے۔

(۶) $\text{ما}^{۲} = \text{لا}^{۳}$ میں لا = ۰ اور $\text{لا} = \frac{۵}{۹}$ کے درمیان قوس کا طول محسوب کرو۔

(۷) $۲\,\text{ما} = \text{لا}^{۲}$ میں مبداء اور $(۴، \frac{۸}{۳})$ کے درمیان قوس کا طول معلوم کرو۔

**۴۱۴ :- منحنی کی متبدل مساوات** :- بالعموم منحنی کی مساوات ما = ف (لا) کی شکل میں دی جاتی ہے - اس میں یہ سہولت ہے کہ لا کی ہر قیمت کے جواب میں ما کی قیمت بہ آسانی نکل سکتی ہے - لیکن اگر منحنی تضمینی تفاعل سے بیان ہو یعنی ف (لا، ما) = ۰ تو لا کی قیمت کے جواب میں ما کی قیمت نکالنے کے لیے ایک مساوات کو حل کرنا پڑیگا - اس قسم کی بعض مساواتوں میں متغیروں کو ایک دیگر متبدل کی رقوم میں بیان کیا جا سکتا ہے - مثلاً لا^۲ + ما^۲ = ا^۲ ایک دائرہ کی مساوات ہے اور اس کے محددو لا، ما کو لا = ا جم ط، ما = ا جب ط سے ط کی رقوم میں بیان کر دیا ہے - اس متغیر ط کو متبدل کہتے ہیں اور لا اور ما کی قیمتیں متبدل کی رقوم میں بیان ہیں - اب ط کی کوئی بھی قیمت کے جواب میں لا اور ما کی قیمت بہ آسانی حاصل ہو سکتی ہے - اسی طرح ناقص لا^۲/ا^۲ + ما^۲/ب^۲ = ۱ کی متبدل مساوات ہے لا = ا جم ط، ما = ب جب ط - نیز مکافی ما^۲ = ۴ ا لا کی متبدل مساوات ہے لا = ا ت^۲، ما = ۲ ا ت وغیرہ وغیرہ - عام صورت میں متبدل مساوات ہوگی لا = ف₁ (ط)، ما = ف₂ (ط) اور ان میں سے متبدل ط کو ساقط کرنے سے منحنی کی تضمینی کارٹیزی مساوات حاصل ہو جائیگی۔

متبدل مساوات سے منحنی کا ڈھال نکالنے کے لیے

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \lim_{\text{مف لا} \to 0} \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \lim_{\text{مف لا} \to 0} \frac{\text{مف ما}}{\text{مف ط}} \times \frac{\text{مف ط}}{\text{مف لا}}$$

$$= \lim_{\text{مف لا} \to 0} \frac{\dfrac{\text{مف ما}}{\text{مف ط}}}{\dfrac{\text{مف لا}}{\text{مف ط}}}$$

اب اگر مف لا ← ۰ تو لازماً مف ط ← ۰ ہوگا

اس لیے

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\dfrac{\text{فر ما}}{\text{فر ط}}}{\dfrac{\text{فر لا}}{\text{فر ط}}} = \frac{\dfrac{\text{فر}\,[\text{ف}_2(\text{ط})]}{\text{فر ط}}}{\dfrac{\text{فر}\,[\text{ف}_1(\text{ط})]}{\text{فر ط}}} = \frac{\text{ف}'_2(\text{ط})}{\text{ف}'_1(\text{ط})}$$

بعض سوالات میں قوس کے طول س کو متبدل لینے سے بہت سہولت ہوتی ہے

نیز $\left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرلا}}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2 = 1 + \frac{\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرط}}\right)^2}{\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرط}}\right)^2}$

$$\therefore \left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرلا}}\right)^2 \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرط}}\right)^2 = \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرط}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرط}}\right)^2$$

$$\therefore \left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرط}}\right)^2 = \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرط}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرط}}\right)^2$$

مثال (۱) خطِ تدویر $\left.\begin{aligned} \text{لا} &= \text{ا}\,(\text{ط} + \text{جب ط}) \\ \text{ما} &= \text{ا}\,(1 - \text{جم ط}) \end{aligned}\right\}$ کے مماس کا ڈھال دریافت کرو نیز قوس کے جملے حاصل کرو۔ اس منحنی کی کارٹیزی مساوات بہت مشکل ہے۔

اب $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرط}} = \text{ا}\,(1 + \text{جم ط})$ ، $\frac{\text{فرما}}{\text{فرط}} = \text{ا جب ط}$

$$\therefore \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{جب ط}}{1 + \text{جم ط}} = \frac{2\,\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{2}\,\text{جم}\,\frac{\text{ط}}{2}}{2\,\text{جم}^2\,\frac{\text{ط}}{2}} = \text{مس}\,\frac{\text{ط}}{2}$$

$$\therefore \left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرط}}\right)^2 = \text{ا}^2(1 + \text{جم ط})^2 + \text{ا}^2\,\text{جب}^2\,\text{ط}$$

$$= 2\,\text{ا}^2 + 2\,\text{ا}^2\,\text{جم ط} = 2\,\text{ا}^2(1 + \text{جم ط})$$

$$= 4\,\text{ا}^2\,\text{جم}^2\,\frac{\text{ط}}{2}$$

$$\therefore \frac{\text{فرس}}{\text{فرط}} = 2\,\text{ا جم}\,\frac{\text{ط}}{2}$$

$$\therefore \text{س} = \int 2\,\text{ا جم}\,\frac{\text{ط}}{2}\,\text{فرط} = \text{ھ} + 4\,\text{ا جب}\,\frac{\text{ط}}{2}$$

مثال (۲) ذیل کے منحنیوں میں نقاطِ مطلوبہ پر مماس اور عماد کی مساواتیں اور زیر مماس اور زیر عماد کے طول محسوب کرو۔

(ا) لا = ت^۲، ما = ت^۳ نقطہ ت = ۱

(ب) لا = ۲ قوث، ما = قوث^۲ نقطہ ت = صفر

(۳) لا = ۴ ا جم^۳ طہ، ما = ۴ ا جب^۳ طہ کے کسی نقطہ (لا، ما) پر مماس، عماد، زیر مماس اور زیر عماد کے طول معلوم کرو۔

(۴) لا = ا جم طہ، ما = ب جب طہ کے نقطہ طہ = $\frac{\pi}{4}$ پر مماس اور عماد کی مساواتیں اور زیرِ مماس اور زیرِ عماد کے طول معلوم کرو۔

(۵) لا = ا (طہ ۔ جب طہ)، ما = ا (۱ ۔ جم طہ) کے اس قوس کا طول معلوم کرو جو طہ = صفر اور طہ = ۲π کے درمیان ہے۔

(۶) لا = ا جم طہ، ما = ا جب طہ میں طہ = ۰ سے طہ = π تک قوس کا طول محسوب کرو۔

(۷) ذیل کے منحنیوں کے لیے $\frac{فر س}{فر ت}$، جب سہ اور جم سہ کو ت کی رقوم میں بیان کرو۔

(ا) لا = ت + ۱، ما = ت^۲

(ب) لا = ت^۲ ما = ت^۳

## ۴۔۴: ۔ قطبی محدّدوں میں منحنی کا ڈھال: ۔

فرض کرو کہ قطبی محددوں کا قطب مر اور ابتدائی خط مرلا ہے اور کسی منحنی ان ق ب پر دو متصل نقطے ن اور ق ہیں جن کے محدّد (ر، طہ) اور (ر + مف ر، طہ + مف طہ) ہیں۔ وتر ق ن کی انتہائی شکل جبکہ ق منحنی پر حرکت کرتے ہوئے نقطہ ن پر منطبق ہو جائے مماس ن ت ہوگا۔ فرض کرو کہ زاویہ ن ت لا = سہ اور زاویہ مر ن ت = فہ کارٹیزی محدّدوں میں زاویہ سہ بہت اہم تھا لیکن قطبی محدّدوں میں مماس اور سمتی نیم قطر کا درمیانی زاویہ فہ اکثر ضابطوں میں استعمال ہوگا۔ یہ زاویہ فہ در اصل زاویہ عہ کی انتہائی

صورت ہے۔ اب مرق پر ن ل عمود گراؤ۔

$$\text{مس ع} = \frac{\text{ن ل}}{\text{ق ل}} = \frac{\text{ر جب (مف ط)}}{\text{ر + مف ر − ر جم (مف ط)}}$$

اس لیے

$$\text{مس ف} = \underset{\text{مف ط} \to \text{۰}}{\text{نہا}} \text{مس ع} = \underset{\text{مف ط} \to \text{۰}}{\text{نہا}} \frac{\text{ر جب (مف ط)}}{\text{ر + مف ر − ر جم (مف ط)}}$$

$$= \underset{\text{مف ط} \to \text{۰}}{\text{نہا}} \text{ر} \times \frac{\text{جب مف ط}}{\text{مف ط}} \times \frac{\text{مف ط}}{\text{ر(۱ − جم مف ط) + مف ر}}$$

$$= \text{ر} \times \text{۱} \times \frac{\text{فر ط}}{\text{فر ر}} \quad \text{چونکہ ۱ − جم مف ط} \to \text{۰}$$

$$\therefore \quad \text{مس ف} = \text{ر} \frac{\text{فر ط}}{\text{فر ر}}$$

اور

$$\text{مس س} = \text{مس (ف + ط)} = \frac{\text{مس ف + مس ط}}{\text{۱ − مس ف مس ط}} = \frac{\text{ر} \frac{\text{فر ط}}{\text{فر ر}} + \text{مس ط}}{\text{۱ − ر} \frac{\text{فر ط}}{\text{فر ر}} \times \text{مس ط}}$$

نیز

$$(\text{وتر ن ق})^{\text{۲}} = (\text{ن ل})^{\text{۲}} + (\text{ل ق})^{\text{۲}}$$

$$= (\text{ر جب مف ط})^{\text{۲}} + (\text{ر + مف ر − ر جم مف ط})^{\text{۲}}$$

$$\therefore \left(\frac{\text{وترن ق}}{\text{قوس ن ق}}\right)^2 \left(\frac{\text{قوس ن ق}}{\text{مف طہ}}\right)^2 = \left(\frac{\text{رجب مف طہ}}{\text{مف طہ}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ر+مف ر ـ رجم مف طہ}}{\text{مف طہ}}\right)^2$$

اب جیسا کہ دفعہ ۲۵ء۴ میں کارٹیزی محدّدوں کے لیے فرض کیا گیا ہے کہ منحنی کے قوس کا طول ناپا جا سکتا ہے اور انتہا میں قوس اور وتر کی نسبت ایک کے مساوی لی جا سکتی ہے تو نیز فرض کرو کہ منحنی کے کسی نقطہ ا سے ن تک قوس کا طول س ہے اور قوس ن ق کا طول مف س ہے۔

$$\text{نہا}_{\text{مف طہ}\to 0}\left(\frac{\text{وترن ق}}{\text{قوس ن ق}}\right)^2\left(\frac{\text{قوس ن ق}}{\text{مف طہ}}\right)^2 = \text{نہا}_{\text{مف طہ}\to 0}\left(\frac{\text{رجب مف طہ}}{\text{مف طہ}}\right)^2 + \text{نہا}_{\text{مف طہ}\to 0}\left(\frac{\text{ر+مف ر ـ رجم مف طہ}}{\text{مف طہ}}\right)^2$$

$$\therefore 1 \times \left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرطہ}}\right)^2 = \text{ر}^2 + \left(\frac{\text{فرر}}{\text{فرطہ}}\right)^2$$

$$\therefore \left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرطہ}}\right)^2 = \text{ر}^2 + \left(\frac{\text{فرر}}{\text{فرطہ}}\right)^2$$

$$\therefore \left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرر}} \times \frac{\text{فرر}}{\text{فرطہ}}\right)^2 = \text{ر}^2 + \left(\frac{\text{فرر}}{\text{فرطہ}}\right)^2$$

$$\therefore \left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرر}}\right)^2 = \left(\text{ر}\,\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرر}}\right)^2 + 1$$

$$= 1 + \text{مس}^2\,\text{فہ} = \text{قط}^2\,\text{فہ}$$

$$\therefore \text{جم فہ} = \frac{\text{فرر}}{\text{فرس}} \quad \text{اور جب فہ} = \text{مس فہ جم فہ} = \text{ر}\,\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرس}}$$

مثال (۱) ر = ل (۱ ـ جم طہ) کے نقطہ طہ = $\frac{\pi}{2}$ پر منحنی کا ڈھال اور حماس اور نیم قطر کا درمیانی زاویہ دریافت کرو۔

اگر نیم قطر اور حماس کے درمیان زاویہ فہ ہو تو

$$\text{مس فہ} = \text{ر}\,\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرر}} = \text{ل}(1-\text{جم طہ}) \times \frac{1}{\text{ل جب طہ}} = \frac{1-\text{جم طہ}}{\text{جب طہ}} = \frac{2\,\text{جب}^2\frac{\text{طہ}}{2}}{2\,\text{جب}\frac{\text{طہ}}{2}\,\text{جم}\frac{\text{طہ}}{2}} = \text{مس}\,\frac{\text{طہ}}{2}$$

$$\therefore \text{فہ} = \frac{\text{طہ}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{اور مس سہ} = \text{مس}(\text{طہ}+\text{فہ}) = \text{مس}\,\frac{3\,\text{طہ}}{2} \;\text{یعنی}\; \text{مس}\,\frac{3\pi}{4} = -1$$

مثال (۲) منحنی ر = ۴ جب طہ + ۳ جم طہ کے لیے $\frac{\text{فرس}}{\text{فرطہ}}$ معلوم کرو۔

اب $\frac{\text{فرر}}{\text{فرطہ}}$ = ۴ جم طہ - ۳ جب طہ

$\therefore \left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرطہ}}\right)^2 = \text{ر}^2 + \left(\frac{\text{فرر}}{\text{فرطہ}}\right)^2$ = (۴ جب طہ + ۳ جم طہ)$^2$ + (۴ جم طہ - ۳ جب طہ)$^2$

= ۱۶ + ۹ = ۲۵

$\therefore \frac{\text{فرس}}{\text{فرطہ}}$ = ۵

(۳) ذیل کے منحنیوں میں حسب معمول ترقیم مطلوبہ نقاط پر مس فہ اور مس سہ کی قیمتیں معلوم کرو :-

(ا) ر = ا قط$^2$ طہ ر = ۲ ا

(ب) ر = ا جب ۳ طہ مبداء پر

(ج) ر$^2$ = ا$^2$ جب ۴ طہ مبداء پر

(د) ر = ۲ جب طہ + ۲ جم طہ کے نقطہ طہ = $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{3}$

(۴) ذیل کے منحنیوں کے لیے $\frac{\text{فرس}}{\text{فرطہ}}$ کی قیمت طہ کے رقوم میں حاصل کرو :-

(ا) ر = ۵ جب طہ + ۱۲ جم طہ

(ب) ر = ۱ + جم طہ

(ج) ر = ۲ جم طہ - ۳ جب طہ

(۵) ثابت کرو کہ ر = ا ہو$^{\text{طہ جم عہ}}$ میں فہ مستقل ہے اور $\frac{\text{فرس}}{\text{فرطہ}}$ = قم عہ

(۶) ثابت کرو کہ ر = ا طہ میں مس فہ = طہ

## ۴۵،۴۔ قطبی محددوں میں قطبی زیر مماس اور قطبی زیر عماد کا طول :-

شکل میں منحنی ا ن ب کے نقطہ ن پر مماس ابتدائی خط م لا سے

ت پر ملتا ہے ۔ اور مماس پر مبداء م سے عمود م و کا طول ع ہے ۔ اب م سے

سمتی نیم قطر م ن کے علی القوائم ایک خط د م س کھینچو جو مماس ن ت سے س اور عماد ن د سے د پر ملے ۔ خط م س کو قطبی زیر مماس اور خط م د کو قطبی زیر عماد کہتے ہیں ۔

$$\text{اب } \text{ع} = \text{ر جب فہ} = \text{ر}\,\frac{\text{مس فہ}}{\text{قط فہ}} = \frac{\text{ر}^2\,\frac{\text{فر ط}}{\text{فر ر}}}{\sqrt{1+\text{ر}^2\left(\frac{\text{فر ط}}{\text{فر ر}}\right)^2}}$$

$$\therefore\ \frac{1}{\text{ع}^2} = \frac{1+\text{ر}^2\left(\frac{\text{فر ط}}{\text{فر ر}}\right)^2}{\text{ر}^4\left(\frac{\text{فر ط}}{\text{فر ر}}\right)^2} = \frac{1}{\text{ر}^2} + \frac{1}{\text{ر}^4}\left(\frac{\text{فر ر}}{\text{فر ط}}\right)^2$$

اور اگر $\frac{1}{\text{ر}} = \text{ی}$ رکھا جائے تو $\frac{\text{فر ر}}{\text{فر ط}} = \frac{\text{فر}\frac{1}{\text{ی}}}{\text{فر ط}} = -\frac{1}{\text{ی}^2}\,\frac{\text{فر ی}}{\text{فر ط}}$

$$\therefore\ \frac{1}{\text{ع}^2} = \text{ی}^2 + \left(\frac{\text{فر ی}}{\text{فر ط}}\right)^2$$

اور قطبی زیر مماس م س $= \text{ر مس فہ} = \text{ر}^2 \dfrac{\text{فرطہ}}{\text{فرر}}$

اور قطبی زیر عماد م د $= \text{ر مم فہ} = \dfrac{\text{فرر}}{\text{فرطہ}}$

اس ترقیم کے مطابق ن س کو مماس کا طول اور ن د کو عماد کا طول کہہ سکتے ہیں۔

مماس کا طول ن س $= \text{ر قط فہ} = \text{ر} \times \sqrt{1 + \text{ر}^2 \left(\dfrac{\text{فرطہ}}{\text{فرر}}\right)^2} = \text{ر} \dfrac{\text{فرس}}{\text{فرر}}$

اور عماد کا طول ن د $= \text{ر قتم فہ} = \text{ر} \times \sqrt{1 + \dfrac{1}{\text{ر}^2}\left(\dfrac{\text{فرر}}{\text{فرطہ}}\right)^2} = \sqrt{\text{ر}^2 + \left(\dfrac{\text{فرر}}{\text{فرطہ}}\right)^2}$

$= \dfrac{\text{فرس}}{\text{فرطہ}}$

مثال (۱) $\text{ر}^2 = \text{ا}^2 \,\text{جم}\, 2\,\text{طہ}$ میں قطبی زیر مماس، قطبی زیر عماد اور مبداء سے مماس پر عمود کا طول محسوب کرو۔

تفرق کرنے سے $\text{ر} \dfrac{\text{فرر}}{\text{فرطہ}} = -\text{ا}^2 \,\text{جب}\, 2\,\text{طہ}$

$\therefore$ قطبی زیر مماس $= \text{ر}^2 \dfrac{\text{فرطہ}}{\text{فرر}} = \text{ر}^2 \times \dfrac{\text{ر}}{-\text{ا}^2 \,\text{جب}\, 2\,\text{طہ}} = \dfrac{-\text{ا}^3 (\text{جم}\, 2\,\text{طہ})^{\frac{3}{2}}}{\text{ا}^2 \,\text{جب}\, 2\,\text{طہ}}$

$= -\text{ا مم}\, 2\,\text{طہ} \sqrt{\text{جم}\, 2\,\text{طہ}}$

قطبی زیر عماد $\dfrac{\text{فرر}}{\text{فرطہ}} = -\dfrac{\text{ا}^2 \,\text{جب}\, 2\,\text{طہ}}{\text{ا}\sqrt{\text{جم}\, 2\,\text{طہ}}} = -\text{ا جب}\, 2\,\text{طہ} \sqrt{\text{قط}\, 2\,\text{طہ}}$

مماس پر عمود کا طول ع ہو تو $\dfrac{1}{\text{ع}^2} = \dfrac{1}{\text{ا}^2} \text{قط}\, 2\,\text{طہ} + \dfrac{\text{ا}^4 \,\text{جب}^2\, 2\,\text{طہ}}{\text{ا}^6 \,\text{جم}^3\, 2\,\text{طہ}} = \dfrac{1}{\text{ا}^2}(\text{قط}\, 2\,\text{طہ} + \text{مس}^2\, 2\,\text{طہ قط}\, 2\,\text{طہ})$

$= \dfrac{1}{\text{ا}^2} \text{قط}^3\, 2\,\text{طہ}$

$\therefore \quad \text{ع} = \text{ا جم}^{\frac{3}{2}}\, 2\,\text{طہ}$

(۲) ذیل کے منحنیوں میں قطبی مماس، قطبی عماد، قطبی زیر مماس، قطبی زیر عماد اور مماس پر مبداء سے عمود کا طول محسوب کرو۔

(ا) ر = ا طہ

(ب) ر = اطہ

(ج) رطہ = ا

(۳) ثابت کرو کہ منحنیات ر = ا (۱ + جم طہ) اور ر = ا (۱ - جم طہ) ایک دوسرے کو علی القوائم کاٹتے ہیں۔

(۴) منحنیات رجم$^{۲}$ طہ/۲ = ا اور رجب طہ = ۲ ا میں زاویۂ تقاطع دریافت کرو۔

(۵) منحنیات ر$^{۲}$ جب ۲ طہ = ا$^{۲}$ اور ر$^{۲}$ = ب$^{۲}$ قط ۲ طہ میں زاویۂ تقاطع دریافت کرو۔

## ۴۶ - الجبرا میں تفرقی سر کا استعمال :-

مساوات ف (لا) = ا. لا$^{ن}$ + ا$_{۱}$ لا$^{ن-۱}$ + ... + ا$_{ن}$ = ۰ کو ن ویں رتبہ کی جبریہ مساوات کہتے ہیں۔ اگر ن مثبت صحیح عدد ہو اور ا.، ا$_{۱}$ ... ا$_{ن}$ حقیقی مقداریں ہوں تو اس مساوات کی ٹھیک ن اصلیں وجود رکھتی ہیں۔ لیکن ہر سوال میں ان اصلوں کی قیمت نہیں نکالی جا سکتی۔ پہلے رتبہ کی مساوات سے چوتھے رتبہ کی عام مساوات کو ہر صورت میں حل کیا جا سکتا ہے اس سے اعلیٰ رتبہ کی مساوات کو عام صورت میں حل نہیں کیا سکتا بلکہ ایک بڑے ریاضی دان نے ثابت کر دیا ہے کہ اس کا امکان بھی نہیں۔ البتہ اگر کسی مساوات کی کوئی اصل مکرر اصل ہو یعنی دو یا زیادہ اصلیں مساوی ہوں تو ان مساوی اصلوں کو بہ آسانی حاصل کیا جا سکتا ہے۔

اب اگر لا = عہ مساوات ف (لا) = ۰ کی ر۔رتبہ کی اصل ہو تو مسئلہ باقی سے ظاہر ہے کہ

صفر = ف (لا) = (لا - عہ)$^{ر}$ فہ (لا) جہاں فہ (عہ) ≠ صفر

اس کو تفرق کرنے سے

ف$'$ (لا) = ر (لا - عہ)$^{ر-۱}$ فہ (لا) + (لا - عہ)$^{ر}$ فہ$'$ (لا) = ۰

$$\therefore\ فَ(لا) = (لا - ع)^{ر-۱}\left[ ر\,فہ(لا) + (لا - ع)\,فہَ(لا) \right] = ۰$$

پس لا = ع مساوات فَ(لا) = ۰ کی (ر-۱)-رتبہ کی اصل ہے۔ اس لیے اگر ف(لا) اور فَ(لا) کا عاد اعظم نکالا جائے تو تمام مکرر اصلیں عاد اعظم میں شریک ہونگی۔ اور اس طرح ان کی قیمت نکل آئیگی۔

**مثال (۱)** — مساوات $لا^{۴} - لا^{۳} - ۷لا^{۲} + ۸لا + ۴ = ۰$ کو حل کرو۔

$$ف(لا) = لا^{۴} - لا^{۳} - ۷لا^{۲} + ۸لا + ۴ = ۰$$

$$\therefore\ فَ(لا) = ۴لا^{۳} - ۳لا^{۲} - ۱۴لا + ۸$$

اب

$$۴لا^{۳} - ۳لا^{۲} - ۱۴لا + ۸ \;)\; ۴لا^{۴} - ۴لا^{۳} - ۲۸لا^{۲} + ۳۲لا + ۱۶ \;(\; لا$$
$$۴لا^{۴} - ۳لا^{۳} - ۱۴لا^{۲} + ۸لا$$
$$-لا^{۳} - ۱۴لا^{۲} + ۲۴لا + ۱۶$$

اب -۴ سے ضرب دینے سے

$$۴لا^{۳} - ۳لا^{۲} - ۱۴لا + ۸ \;)\; ۴لا^{۳} + ۵۶لا^{۲} - ۹۶لا - ۶۴ \;(\; ۱$$
$$۴لا^{۳} - ۳لا^{۲} - ۱۴لا + ۸$$
$$۵۹لا^{۲} - ۸۲لا - ۷۲$$

$$۵۹لا^{۲} - ۸۲لا - ۷۲ \;)\; ۲۳۶لا^{۳} - ۱۷۷لا^{۲} - ۸۲۶لا + ۴۷۲ \;(\; ۴لا$$
$$۲۳۶لا^{۳} - ۳۲۸لا^{۲} - ۲۸۸لا$$
$$۱۵۱لا^{۲} - ۵۳۸لا + ۴۷۲$$

۵۹ سے ضرب دیکر

$$۵۹لا^{۲} - ۸۲لا - ۷۲ \;)\; ۸۹۰۹لا^{۲} - ۳۱۷۴۲لا + ۲۷۸۴۸ \;(\; ۱۵۱$$
$$۸۹۰۹لا^{۲} - ۱۲۳۸۲لا - ۱۰۸۷۲$$
$$-۱۹۳۶۰لا + ۳۸۷۲۰$$

اس کو -۱۹۳۶۰ سے تقسیم کرنے سے

$$لا - ۲ \;)\; ۵۹لا^{۲} - ۸۲لا - ۷۲ \;(\; ۵۹لا + ۳۶$$
$$۵۹لا^{۲} - ۱۱۸لا$$
$$۳۶لا - ۷۲$$
$$۳۶لا - ۷۲$$
$$\times$$

اس لیے (لا − ۲) جملات ف (لا) اور فَ (لا) کا عادِ اعظم ہے پس (لا − ۲)$^{۲}$ جملہ ف(لا) کا جزوِ ضربی ہے۔

∴ ف (لا) = لا$^{۴}$ − لا$^{۳}$ − ۷لا$^{۲}$ + ۸لا + ۴ = (لا − ۲)$^{۲}$ فہ (لا)

فہ (لا) کی قیمت تقسیم سے نکالی جاسکتی ہے۔

لا$^{۲}$ − ۴لا + ۴ ) لا$^{۴}$ − لا$^{۳}$ − ۷لا$^{۲}$ + ۸لا + ۴ ( لا$^{۲}$ + ۳لا + ۱

لا$^{۴}$ − ۴لا$^{۳}$ + ۴لا$^{۲}$

۳لا$^{۳}$ − ۱۱لا$^{۲}$ + ۸لا + ۴

۳لا$^{۳}$ − ۱۲لا$^{۲}$ + ۱۲لا

لا$^{۲}$ − ۴لا + ۴

لا$^{۲}$ − ۴لا + ۴

×

∴ فہ (لا) = لا$^{۲}$ + ۳لا + ۱

اور ف (لا) = (لا − ۲)$^{۲}$ (لا$^{۲}$ + ۳لا + ۱) = ۰

∴ مساوات کی اصلیں ہیں ۲، ۲، $\frac{-۳ \pm \sqrt{۵}}{۲}$

حل کرو

(۲) لا$^{۴}$ + ۲لا$^{۳}$ − ۸لا + د = ۰

(۳) لا$^{۴}$ − ۹لا$^{۲}$ + ۴لا + ۱۲ = ۰

(۴) لا$^{۵}$ − ۲لا$^{۴}$ − ۲لا$^{۳}$ + ۴لا$^{۲}$ + لا − ۲ = ۰

(۵) ۳لا$^{۷}$ − لا$^{۶}$ − لا$^{۵}$ − لا$^{۴}$ = ۰

(۶) لا$^{۵}$ − ۳لا$^{۴}$ − ۲لا$^{۳}$ + ۶لا$^{۲}$ + لا − ۳ = ۰

(۷) لا$^{۶}$ + ۷لا$^{۵}$ + ۲۳لا$^{۴}$ + ۸۶لا$^{۳}$ + ۱۵۵لا$^{۲}$ + ۱۵۹لا + ۹۹ = ۰

(۸) لا$^{۵}$ − ۳لا$^{۴}$ − ۵لا$^{۳}$ + ۱۳لا$^{۲}$ + ۲۴لا + ۱۰ = ۰

(۹) اس طریقہ سے مساوات درجۂ دوم کی مساوی اصلوں کے لیے شرط حاصل کرو۔

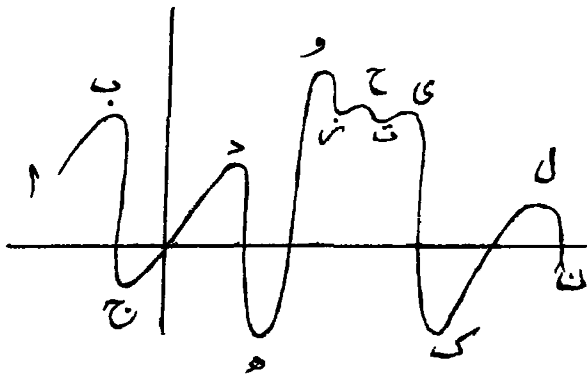
(۱۰) اس طریقہ سے مساوات ا لا$^{۳}$ + ب لا$^{۲}$ + ج لا + د = ۰ کی دو مساوی اصلوں کی شرط دریافت کرو۔

(۱۱) ثابت کرو کہ مساوات (ا) لا$^{۳}$ + ۹لا$^{۲}$ + ۲ لا − ۴۸ = ۰

اور (ب) لا$^{۴}$ − ۳لا$^{۳}$ − ۶لا$^{۲}$ + ۱۴لا + ۱۲ = ۰

کی کوئی مکرر اصلیں نہیں ہیں۔

**۷ء۴ - اعظم اور اقل قیمتیں** — دوسرے باب میں بتایا گیا ہے کہ مسلسل تفاعل اپنی بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمتوں کے درمیان تمام قیمتیں اختیار کرتا ہے۔ ممکن ہے کہ تفاعل مسلسل بڑھتا چلا جائے یا مسلسل گھٹتا جائے یا کبھی بڑھے اور پھر گھٹے وغیرہ، وغیرہ۔ مسلسل بڑھنے یا گھٹنے والے تفاعلوں کو یک رنگی تفاعل کہتے ہیں۔ ایسے تفاعلوں میں بیش ترین قیمت اور کم ترین قیمت وقفے کے سروں پر ہوتی ہے۔ لیکن کہیں بڑھنے اور کہیں گھٹنے والے تفاعل کی صورت میں لازمی چند ایسے نقطے ہونگے جہاں بڑھنا ختم ہو کر گھٹنا عین شروع ہوگا یا گھٹنا ختم ہو کر بڑھنا عین شروع ہوگا۔ شکل میں ایک منحنی کی ترسیم ہے۔ اس ترسیم سے ظاہر ہے کہ نقاط ب، د، و، ح، ی اور ل پر بڑھنا ختم ہو کر گھٹنا شروع




ہوتا ہے اور نقاط ج، ھ، ز، ت، ک پر گھٹنا ختم ہو کر بڑھنا عین شروع ہوتا ہے۔

ان نقاط کو منحنی کے ٹھہراؤ کے نقطے کہتے ہیں کیونکہ ان نقطوں پر معین بڑھنے یا گھٹنے سے رُک کر ٹھہر سا جاتا ہے - اب ٹھہراؤ کے نقطوں میں مزید امتیاز کیا جاتا ہے - وہ ٹھہراؤ کے نقطے جہاں بڑھنا ختم ہو کر گھٹنا شروع ہوتا ہے جیسے ب د .... اعظم نقطے کہلاتے ہیں اور گھٹنا ختم ہو کر بڑھنا عین شروع ہونے والے نقطے جیسے جھ ..... اقل نقطے - واضح رہے کہ تفاعل کی اعظم قیمت لازماً بیش ترین قیمت نہیں ہے اور اسی طرح اقل قیمت کم ترین قیمت نہیں ہے - تحلیلی زبان میں اس بات کو یوں بیان کرتے ہیں کہ اگر لا = ا پر

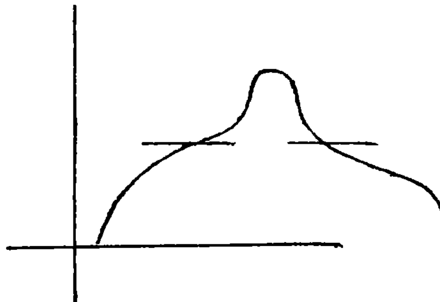
ف (ا) > ف (ا ± ھ) جہاں ھ کافی چھوٹی مثبت مقدار ہے تو لا = ا کو تفاعل ف (لا) کا اعظم نقطہ اور ف (ا) کو تفاعل کی اعظم قیمت کہتے ہیں -

اسی طرح اگر لا = ب پر ف (ب) < ف (ب ± ھَ) جہاں ھَ کافی چھوٹی مثبت مقدار ہے تو لا = ب کو تفاعل ف (لا) کا اقل نقطہ اور ف (ب) کو تفاعل کی اقل قیمت کہتے ہیں -

اس تعریف سے ظاہر ہے کہ کسی نقطہ پر تفاعل کا اعظم یا اقل ہونا قرب کے نقطوں پر تفاعل کی قیمت پر منحصر ہے اور بیش ترین یا کم ترین قیمت کا انحصار پورے وقفے میں تفاعل کی قیمت پر ہے -

اب ہمیں معلوم ہے کہ اگر ف (لا) متغیر لا کے ساتھ ساتھ بڑھ رہا ہو تو فَ (لا) یعنی $\frac{\text{فر}[\text{ف(لا)}]}{\text{فرلا}}$ کی قیمت مثبت ہوگی اور اگر ف (لا) گھٹ رہا ہو جبکہ لا بڑھ رہا ہے تو فَ (لا) منفی ہوگا - ف (لا) کی اعظم قیمت اُس نقطہ پر ہوتی ہے جہاں ف (لا) بڑھنا ختم کر کے عین گھٹنا شروع کرے یعنی فَ (لا) مثبت قیمت سے منفی قیمت میں عین تبدیل ہوتا ہے - یعنی فَ (لا) صفر کے مساوی ہوتا ہے - اسی طرح ف (لا) کی اقل قیمت اس نقطہ پر ہوگی جہاں فَ (لا) منفی قیمت سے مثبت قیمت میں عین تبدیل ہو - پس ظاہر ہے کہ تفاعل کی اعظم اور اقل قیمتیں ایسے نقطوں پر ہوتی ہیں جہاں فَ (لا) صفر ہے -

نیز فَ (لا) = ۰ والے نقطوں پر تفاعل کی ایک طرح قیمت ٹھہر سی جاتی ہے اور اس لیے ان تمام نقطوں کو ٹھہراؤ کے نقطے کہتے ہیں ۔ ٹھہراؤ کے نقطے دریافت کرنے کے لیے تفاعل ف (لا) کو تفرق کرکے فَ (لا) کو صفر رکھو اور اس سے لا کی قیمتیں نکالو جو درکار ہیں۔ لیکن یہ ضروری نہیں کہ تمام ٹھہراؤ کے نقطے اعظم یا اقل نقطے ہوں ۔ ایسا ممکن ہے کہ فَ (لا) کی قیمت مثبت سے کم ہوتے ہوتے صفر ہو جائے اور پھر بڑھنے لگے یعنی ہمیشہ مثبت رہے۔ اسی طرح یہ بھی ممکن ہے کہ فَ (لا) کی قیمت منفی سے بڑھتے بڑھتے صفر ہو جائے اور پھر گھٹنے لگے یعنی ہمیشہ منفی رہے ۔ ظاہر ہے کہ یہ نقطے اعظم یا اقل نقطے نہیں ہیں ۔ چونکہ ان نقطوں پر منحنی مڑ جاتا ہے جیسا کہ ترسیم سے ظاہر ہے اس لیے ان نقطوں کو انعطاف کے نقطے کہتے ہیں ۔ پس ٹھہراؤ کے نقطوں میں مزید امتیاز کرنے کے لیے فَ (لا) کی علامت ٹھہراؤ کے نقطے سے ذرا پہلے اور ذرا بعد دریافت کرو۔ یاد رہے کہ فَ (لا) کی ٹھیک قیمت نکالنے کی ضرورت نہیں بلکہ صرف علامت درکار ہے۔ اب اگر دونوں جانب علامت ایک ہی ہے تو یہ انعطاف کا نقطہ ہے اور اگر علامت مثبت سے منفی ہوتی ہے تو اعظم نقطہ ہے اور اگر علامت منفی سے مثبت ہوتی ہے تو اقل نقطہ ہے ۔ واضح رہے کہ فَ (لا) = ۰ کے علاوہ اور بھی انعطاف کے نقطے ہو سکتے ہیں لیکن اعظم اور اقل نقطوں کے لیے یہ شرط ضروری ہے سوائے اس صورت کے جبکہ منحنی کا ڈھال غیر مسلسل ہے۔



**مثال (۱)** ـ منحنی ما = $\frac{\text{لا}^5}{5} - \frac{\text{لا}^4}{4} - 4\,\text{لا}^3 - 2\,\text{لا}^2 + 16\,\text{لا} + 5$ کے ٹھہراؤ کے

نقطے دریافت کرو اور ان میں تفریق کرو۔

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{لا}^{۴} - \text{لا}^{۳} - ۱۲\,\text{لا}^{۲} - ۴\,\text{لا} + ۱۶ = (\text{لا} - ۱)(\text{لا} - ۴)(\text{لا} + ۲)^{۲}$$

اب ٹھیراؤ کے نقطوں کے لیے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = ۰$

یعنی $(\text{لا} - ۱)(\text{لا} - ۴)(\text{لا} + ۲)^{۲} = ۰$

اور لا = ۱، ۴، −۲

نقطہ لا = ۱ پر اگر ھ کافی چھوٹی مثبت مقدار ہو تو

لا = ۱−ھ کے لیے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی علامت ہے (−)(−)(+) = (+)

اور لا = ۱+ھ . . . . . . (+)(−)(+) = (−)

اس لیے لا = ۱ تفاعل کا اعظم نقطہ ہے اور اعظم قیمت $۱۴\frac{۱۹}{۲۰}$ ہے

اسی طرح لا = ۴−ھ کے لیے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی علامت ہے (+)(−)(+) = (−)

اور لا = ۴+ھ . . . . . . . . . . (+)(+)(+) = (+)

اس لیے لا = ۴ تفاعل کا اقل نقطہ ہے، اور تفاعل کی اقل قیمت $-\frac{۲۶}{۵}$ ہے

اور لا = −۲ پر لا = −۲−ھ کے لیے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی علامت ہے (−)(−)(+) = (+)

اور لا = −۲+ھ . . . . . . . . . . (−)(−)(+) = (+)

اس لیے لا = −۲ نقطۂ انعطاف ہے اور یہاں تفاعل کی قیمت $-\frac{۳}{۵}$ ہے۔

(۲) ذیل کے منحنیوں کے ٹھیراؤ کے نقطے دریافت کرو اور ان میں تمیز کرو۔

(ا) $\text{ما} = \text{لا}^{۳} - ۳\,\text{لا}^{۲} - ۹\,\text{لا} - ۵$

(ب) $\text{ما}^{۲} = \text{لا}\,(\text{لا}^{۲} - ۴)$

(ج) $\text{ما} = ۲\,\text{لا}^{۳} - ۹\,\text{لا}^{۲} + ۱۲\,\text{لا} - ۳$

(د) $\text{ما} = \frac{۱}{۳}\text{لا}^{۳} - \frac{۱}{۲}\text{لا}^{۲} - ۲\,\text{لا} + ۲$

(۳) ذیل کے تفاعلوں کی اعظم اور اقل قیمتیں محسوب کرو۔

(ا) $\text{لا}^{۴}$ − ۸ $\text{لا}^{۳}$ + ۲۲ $\text{لا}^{۲}$ − ۲۴ لا + ۱۲

(ب) لا $(\text{۶} + \text{لا})^{۲}$ $(\text{۶} - \text{لا})^{۳}$

(ج) لا $(\text{ا} + \text{لا})^{۲}$ $(\text{ا} - \text{لا})^{۳}$

(د) (۲ + لا) $(\text{۳} - \text{۲لا})^{۲}$ (لا + ۴)

## ۴،۱۷ ۔ دوسرے رتبہ کے مشتق کی ہندسی تعبیر:—

گذشتہ دفعہ میں اعظم اور اقل قیمتیں حاصل کی گئی ہیں اور ان میں امتیاز کرنے کے لیے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی علامت پر نقطہ سے ذرا پہلے اور ذرا بعد غور کرنا پڑتا ہے۔ لیکن اکثر سوالات میں یہ مشکل ہوگا۔ ہمیں معلوم ہے کہ جیسے پہلے مشتق $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی مثبت یا منفی علامت اس بات کو تعبیر کرتی ہے کہ لا کے بڑھنے کے ساتھ ما بڑھ رہا ہے یا گھٹ رہا ہے۔ اسی طرح $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کے مشتق یعنی $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ ما}}{\text{فر لا}^{۲}}$ کی مثبت یا منفی علامت اس بات کو تعبیر کرتی ہے کہ لا کے بڑھنے کے ساتھ $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ بڑھ رہا ہے یا گھٹ رہا ہے۔ پس اگر $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ ما}}{\text{فر لا}^{۲}}$ کی قیمت مثبت ہے تو اس کے معنی یہ ہیں کہ لا کے بڑھنے کے ساتھ $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ یعنی منحنی کا ڈھال بڑھ رہا ہے اور $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ ما}}{\text{فر لا}^{۲}}$ کی منفی علامت سے ظاہر ہے کہ لا کے بڑھنے کے ساتھ $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ گھٹ رہا ہے۔ اب اعظم نقطہ پر $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ مثبت سے منفی قیمت معین اختیار کرتا ہے یعنی گھٹتا ہے۔ اس لیے اعظم نقطے پر $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ ما}}{\text{فر لا}^{۲}}$ منفی ہوگا۔ اور اقل نقطے پر $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ منفی سے مثبت ہوتا ہے۔ یعنے بڑھتا ہے اس لیے اقل نقطے پر $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ ما}}{\text{فر لا}^{۲}}$ مثبت ہوگا۔ اور نقطۂ انعطاف پر منحنی کا ڈھال $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ بڑھنا ختم کر کے گھٹنا شروع کرتا ہے یا گھٹنا ختم کر کے بڑھنا

شروع کرتا ہے یعنی $\frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲}$ کی قیمت صفر ہے۔

پس اگر کسی نقطہ پر $\frac{فر ما}{فر لا}$ = صفر اور $\frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲}$ مثبت ہے تو نقطہ اقل نقطہ ہے۔

اور اگر $\frac{فر ما}{فر لا}$ = صفر اور $\frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲}$ منفی ہے تو اعظم نقطہ ہے۔

اور $\frac{فر ما}{فر لا}$ = صفر اور $\frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲}$ = صفر تو بالعموم نقطۂ انعطاف ہے۔

مثال (۱) ما = ۳ لا^۴ - ۸ لا^۳ - ۳۰ لا^۲ + ۷۲ لا + ۸۵ کے اعظم اور اقل نقطے دریافت کرو۔

$\frac{فر ما}{فر لا}$ = ۱۲ لا^۳ - ۲۴ لا^۲ - ۶۰ لا + ۷۲ = ۱۲ (لا^۳ - ۲ لا^۲ - ۵ لا + ۶)

= ۱۲ (لا - ۱) (لا + ۲) (لا - ۳)

∴ $\frac{فر ما}{فر لا}$ = صفر جبکہ لا = ۱، -۲، اور ۳

اب $\frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲}$ = ۳۶ لا^۲ - ۴۸ لا - ۶۰

لا = ۱ کے لیے $\frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲}$ = ۳۶ - ۴۸ - ۶۰ یعنی منفی مقدار ہے

اور اس لیے یہ اعظم نقطہ ہے۔

لا = -۲ کے لیے $\frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲}$ = ۱۴۴ + ۹۶ - ۶۰ یعنی مثبت مقدار ہے

اور یہ اقل نقطہ ہے۔

لا = ۳ کے لیے $\frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲}$ = ۳۲۴ - ۱۴۴ - ۶۰ یعنی مثبت مقدار ہے

اور یہ اقل نقطہ ہے۔

مثال (۲) ثابت کرو کہ مستقل محیط والے مستطیلوں میں سب سے بڑا رقبہ والا مستطیل مربع ہے۔

فرض کرو کہ مستطیل کے اضلاع لا اور ما ہیں اور اس کا محیط ل ہے۔

تو ۲ لا + ۲ ما = ل اور رقبہ س = لا ما = لا (ل - ۲ لا) / ۲

= ل لا / ۲ - لا$^{۲}$

فر س / فر لا = ل / ۲ - ۲ لا ∴ لا = ل / ۴

اور فر$^{۲}$ س / فر لا$^{۲}$ = - ۲ اس لیے لا = ل / ۴ اعظم قیمت ہے اور ما = ل / ۴

پس مستطیل مربع ہوگا اور اس کا رقبہ اعظم ہوگا۔

ذیل کے تفاعلوں کے لیے اعظم اور اقل قیمتیں محسوب کرو:—

(۳) ۶ لا / (۱ + لا$^{۲}$)

(۴) (لا$^{۲}$ - ۷ لا + ۶) / (لا - ۱۰)

(۵) (ل - لا)$^{۳}$ / (ل - ۲ لا)

ذیل کے منحنیوں کے ٹھیراؤ کے نقطے معلوم کرو اور ان میں تمیز کرو:—

(۶) ۴ ما + لا$^{۳}$ - ۳ لا$^{۲}$ + ۴ = ۰

(۷) لا$^{۲}$ + ما / لا = ۱۲

(۸) ما = لا - ۲ جم لا

(۹) لا / ۲ = ما - جب لا

(۱۰) ما = (لا + ۱)$^{۲/۳}$ (لا - ۵)$^{۲}$

(۱۱) ثابت کرو کہ مستقل رقبے والے مستطیلوں میں سب سے چھوٹے محیط والا

مستطیل مربع ہے۔

(۱۲) ثابت کرو کہ دائرہ کا سب سے بڑا وتر اس کا قطر ہے۔

(۱۳) ایک رُبع دائرہ میں اعظم رقبہ والا مستطیل جو بن سکتا ہے اس کے ابعاد معلوم کرو۔

(۱۴) اگر ۲ لا + ما = ک جہاں ک مستقل ہے تو (لا × ما) کی اعظم قیمت معلوم کرو۔

(۱۵) خط ما = لا پر وہ نقطہ معلوم کرو جس کے فاصلوں کا مربع نقاط (-ا، ۰) اور (ا، -) سے اقل ہو۔

(۱۶) قطر ا والے دائرہ میں مستطیل بنایا گیا ہے جس کے اضلاع لا اور ما ہیں بتاؤ کہ لا ما² کیا اعظم ہوگا۔

(۱۷) ایک پھولوں کی کیاری قطاع دائرہ کی شکل کی بنانا مقصود ہے۔ اس کو مکمل گھیرنے کے لیے ۲۰ فٹ طول کا تار ہے۔ بتاؤ کہ کیاری کا رقبہ زیادہ سے زیادہ ہونے کی صورت میں قطاع دائرہ کا نصف قطر کیا ہے۔

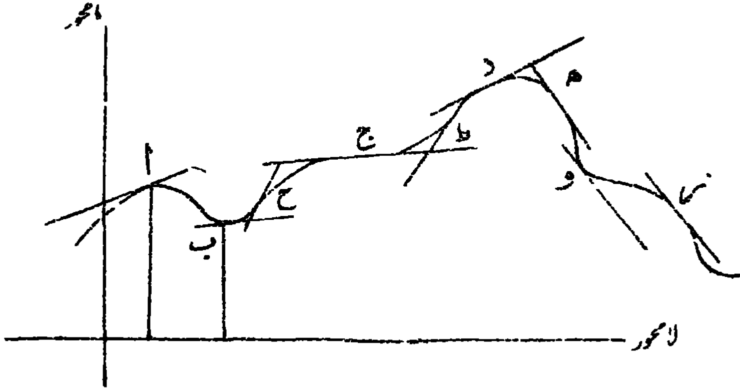
(۱۸) ایک کھلے تالاب کا قاعدہ مربع ہے اور رُخ انتصابی ہیں۔ اور اس کی گنجائش ۴۰۰۰ مکعب فٹ ہے۔ اندر کی جملہ سطح پر سفیدہ کرنے کے اخراجات کم سے کم ہونے کی صورت میں تالاب کے ابعاد معلوم کرو۔

(۱۹) ایک تار کے ٹکڑے کو دو حصوں میں کاٹ کر ایک حصہ کو دائرہ میں اور دوسرے حصہ کو مربع میں موڑ دیا گیا ہے۔ اگر دونوں شکلوں کے مربع کا مجموعہ اقل ہو تو تار کی تقسیم کی نسبت دریافت کرو۔

(۲۰) بتاؤ کہ ۲۰۰ مربع فٹ کپڑے سے زیادہ سے زیادہ حجم والے مخروطی نما خیمہ کے ابعاد کیا ہونگے۔

**۴۔۱۷۵ محدب اور مقعر منحنی:** - اگر منحنی کے کسی نقطہ پر مماس کھینچا جائے تو نقطہ کے قرب میں منحنی، مماس کے کلیتاً اوپر کی جانب یا نیچے کی جانب یا ایک طرف کا حصہ نیچے کی جانب اور دوسری طرف کا حصہ اوپر کی جانب واقع ہوگا۔ شکل میں ایک منحنی مرتسم کیا گیا ہے۔ اس کے نقاط ا، د اور س پر منحنی، مماس کے کلیتاً نیچے واقع ہے اور نقاط ب اور و پر کلیتاً اوپر واقع ہے نقاط ح، ج، ط، ھ پر منحنی کا ایک جانب کا حصہ ایک طرف اور دوسری جانب کا حصہ دوسری طرف واقع ہے یعنی منحنی، مماس کو ان نقطوں پر عبور کرتا ہے۔ اگر کسی نقطہ کے دونوں جانب منحنی، مماس کے کلیتاً اوپر واقع ہو تو ایسے نقطہ پر منحنی کو اوپر کی

طرف مقعر کہتے ہیں اور اگر کلیتاً نیچے واقع ہو تو منحنی کو اس نقطہ پر اوپر کی طرف محدّب کہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ اوپر کی طرف مقعر اور نیچے کی طرف محدب ایک ہی بات ہے اور اسی طرح اوپر کی طرف محدب اور نیچے کی طرف مقعر ایک ہی چیز ہے۔ نیز اگر منحنی




مماس کو عبور کرے تو ایسے نقطہ کو نقطۂ انعطاف کہتے ہیں۔ ہر نقطۂ انعطاف منحنی کے محدّب اور مقعر حصوں کو جدا کرتا ہے۔

اب اوپر کی طرف محدّب نقطے کے قرب میں منحنی کلیتاً مماس کے نیچے واقع ہے یعنی مماس کا ڈھال مسلسل کم ہوتا جاتا ہے۔ اور مقعر نقطہ کے قرب میں مماس کا ڈھال بڑھتا جاتا ہے۔ اور نقطۂ انعطاف پر مماس کا ڈھال بڑھنا یا گھٹنا ختم کرکے گھٹنا یا بڑھنا علین شروع کرتا ہے۔ اس لیے محدّب نقطہ پر $\frac{فر^{2} ما}{فر لا^{2}}$ منفی ہے۔ مقعر نقطے پر $\frac{فر^{2} ما}{فر لا^{2}}$ مثبت ہے اور نقطۂ انعطاف پر $\frac{فر^{2} ما}{فر لا^{2}}$ صفر ہے۔

اگر محدّب نقطے پر $\frac{فر ما}{فر لا}$ صفر ہے تو یہ اعظم نقطہ ہوگا اور مقعر نقطہ پر $\frac{فر ما}{فر لا} = 0$ تو اقل نقطہ ہوگا۔ اس سے ظاہر ہے کہ اعظم اور اقل نقطے منحنی کے محدّب اور مقعر نقطوں میں سے چند نقطے ہیں۔

مثال (۱) منحنی $ما = ۳لا^{۴} - ۵لا^{۳} + ۳لا - ۲$ کے نقاطِ انعطاف دریافت کرو اور بتاؤ کہ کون سے حصے محدّب اور مقعر ہیں۔

اب $\frac{فر ما}{فر لا} = ۱۲لا^{۳} - ۱۵لا^{۲} + ۳$

اور $\frac{فر^{۲} ما}{فر لا^{۲}} = ۴۸ لا^{۲} - ۳۰ لا = ۴۸ لا (لا - \frac{۵}{۸})$

نقاطِ انعطاف پر $\frac{فر^{۲} ما}{فر لا^{۲}}$ = صفر اس لیے لا = صفر اور $\frac{۵}{۸}$ نقاطِ انعطاف ہیں۔

اگر لا < صفر تو $\frac{فر^{۲} ما}{فر لا^{۲}}$ مثبت ہے یعنی منحنی مقعر ہے۔

اور لا > صفر ہے لیکن < $\frac{۵}{۸}$ سے تو $\frac{فر^{۲} ما}{فر لا^{۲}}$ منفی ہے یعنی منحنی محدب ہے۔

لا > $\frac{۵}{۸}$ ہے تو $\frac{فر^{۲} ما}{فر لا^{۲}}$ مثبت ہے یعنی منحنی مقعر ہے۔

(۲) منحنی $ما^{۵} = (لا - ۳)^{۳}$ کے نقاطِ انعطاف دریافت کرو۔

منحنی کی مساوات ہے $ما = (لا - ۳)^{\frac{۳}{۵}}$

$$\therefore \quad \frac{فر ما}{فر لا} = \frac{۳}{۵}(لا - ۳)^{-\frac{۲}{۵}} = \frac{۳}{۵ (لا - ۳)^{\frac{۲}{۵}}}$$

اور $$\frac{فر^{۲} ما}{فر لا^{۲}} = -\frac{۶}{۲۵}(لا - ۳)^{-\frac{۷}{۵}} = -\frac{۶}{۲۵ (لا - ۳)^{\frac{۷}{۵}}}$$

اس سوال میں $\frac{فر^{۲} ما}{فر لا^{۲}}$ متغیر لا کی کسی محدود قیمت کے لیے صفر نہیں ہے البتہ لا = ۳ کے لیے $\frac{فر ما}{فر لا}$ اور $\frac{فر^{۲} ما}{فر لا^{۲}}$ دونوں لامتناہی ہیں۔ اور اگر لا < ۳ تو $\frac{فر^{۲} ما}{فر لا^{۲}}$ منفی ہے اور لا > ۳ تو $\frac{فر^{۲} ما}{فر لا^{۲}}$ مثبت ہے یعنی $\frac{فر^{۲} ما}{فر لا^{۲}}$ کی علامت نقطہ لا = ۳ پر بدلتی ہے اور یہ نقطۂ انعطاف ہے اور لا < ۳ کے لیے منحنی محدّب ہے اور لا > ۳ کے لیے مقعر ہے۔

(۳) $ما = لا^{۲}$، $ما = لا^{۳}$، $ما = لا^{۴}$ ... $ما = لا^{ن}$ کے لیے نقاطِ انعطاف معلوم کرو اور محدب اور مقعر حصّوں میں تقسیم کرو۔

ذیل کے منحنیوں کے نقاطِ انعطاف معلوم کرو اور انہیں محدّب اور مقعر حصّوں

میں تقسیم کرو:-

(۴) ما = جب لا، جم لا، مس لا، قطلا، قم لا

(۵) ما = و^لا، لوک لا

(۶) ما = لا^۴ − ۳ لا^۳ − ۶ لا^۲ + ۷ لا − ۳

(۷) ما = ۳ لا^۴ − ۴ لا^۳ + ۷ لا − ۱

(۸) ما = لا^۳ − ۵ لا^۲ + ۸ لا + ۲

(۹) ما − ب = (لا − ل)^۳

(۱۰) ما = ۴ لا^۲ − ۷ لا + ۳

(۱۱) ما = ۲ − ۳ لا − ۴ لا^۲

(۱۲) ل لا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ + ۲ گ لا + ۲ ب ما + ج = ۰

## ۹۰؍۴ - عملی ریاضی میں تفرقی سر کے اطلاقات :-

ابتداء میں بتایا گیا ہے کہ تفرقی سر شرح تبدیلی کا ناپ ہے۔ علمِ ہندسہ میں اس کے اطلاقات کی چند مثالیں اب تک دی گئی ہیں۔ لیکن تمام علوم سائنس میں ہر موقع پر شرح تبدیلی کے ناپ کی ضرورت پڑتی ہے۔ وقت کے گزرنے کے ساتھ جسم اپنی وضع یا مقدار یا مقام بدلتا ہے اور اس لیے بالعموم جسم کی وضع یا مقدار یا مقام کے بیان کرنے والے تفاعل میں وقت بھی شریک ہوتا ہے اور بلحاظ وقت تفرقی سر سے شرح تبدیلی کو ناپتے ہیں۔ بالخصوص علمِ حرکت میں تفرقی سر کا خاص اطلاق ہے۔

## ۹۱؍۴۔ رفتار اور اسراع :- اگر ایک ذرّہ خطِ مستقیم میں

حرکت کر رہا ہو اور کسی نقطۂ مر کو مبداء مان لیا جائے اور وقت ت ثانیوں کے بعد




اس کا مقام ا ہو جہاں مرا = لا تو اس آن میں رفتار دریافت کرنے کے لیے

فرض کرو کہ مزید فاصلہ مف لا طے کرنے میں وقت مف ت صرف ہوتا ہے۔ اس لیے رفتار $\frac{مف\ لا}{مف\ ت}$ کی انتہا ہوگی۔

$$یعنی\ رفتار\ ی = \frac{فر\ لا}{فر\ ت}$$

اگر ذرہ مستوی میں حرکت کر رہا ہے اور وقت ت پر ذرہ کے محدد (لا، ما) ہیں تو اس کی رفتار (ی، و) محوروں کی سمتوں میں $\frac{فر\ لا}{فر\ ت}$ اور $\frac{فر\ ما}{فر\ ت}$ ہوگی۔ اکثر سوالات میں رفتار بھی بدلتی ہے یعنی $\frac{فر\ لا}{فر\ ت}$ بھی ت کا تفاعل ہوتا ہے۔ رفتار کے بدلنے کی شرح کو اسراع کہتے ہیں اس لیے ایک خط میں اسراع ہوگا

$$\frac{فر\ ی}{فر\ ت} = \frac{فر}{فر\ ت}\left(\frac{فر\ لا}{فر\ ت}\right) = \frac{فر^{2}\ لا}{فر\ ت^{2}}$$

$$= \frac{فر\ ی}{فر\ لا} \times \frac{فر\ لا}{فر\ ت} = ی\ \frac{فر\ ی}{فر\ لا}$$

اور مستوی میں اسراع ہوگا

$$\frac{فر^{2}\ لا}{فر\ ت^{2}}\ اور\ \frac{فر^{2}\ ما}{فر\ ت^{2}}\quad یا\quad ی\ \frac{فر\ ی}{فر\ لا}\ اور\ و\ \frac{فر\ و}{فر\ ما}$$ جہاں

$$ی = \frac{فر\ لا}{فر\ ت}\ اور\ و = \frac{فر\ ما}{فر\ ت}$$

اب اگر کسی سوال میں ایک ذرہ خطِ مستقیم میں حرکت کر رہا ہو اور اس کا اسراع وقت یا فاصلہ کا تفاعل ہو تو مساواتِ حرکت ہوگی:۔

$$\frac{فر^{2}\ لا}{فر\ ت^{2}} = ف\ (ت)$$

یا $ی\ \frac{فر\ ی}{فر\ لا} = فہ\ (لا)$ ہر دو صورت میں تکمل سے رفتار اور فاصلہ

وقت کی رقوم میں دریافت ہو سکتا ہے۔

مثال (۱) ایک ذرّہ خطِ مستقیم میں حرکت کرتا ہے اور اس کا اسراع ع مستقل ہے۔ فاصلہ اور وقت میں رشتہ دریافت کرو۔

فرض کرو کہ وقت ت پر مبداء سے فاصلہ لا ہے اور وقت صفر پر ذرہ نے مبداء سے رفتار ب کے ساتھ حرکت شروع کی۔

$$\text{اب}\quad \frac{\text{فر}^2\,\text{لا}}{\text{فرت}^2} = \text{ع}$$

$$\therefore \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \text{ع ت} + \text{مستقل م}_1$$

ابتدائی شرط سے ظاہر ہے کہ رفتار $\text{ب} = 0 + \text{م}_1$

$$\therefore \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \text{ب} + \text{ع ت}$$

پھر تکمل کرنے سے $\text{لا} = \text{ب ت} + \frac{1}{2}\text{ع ت}^2 + \text{مستقل م}_2$

اب چونکہ $\text{لا} = 0$ جبکہ $\text{ت} = 0$ اس لیے مستقل $\text{م}_2$ صفر ہے

$$\therefore \text{لا} = \text{ب ت} + \frac{1}{2}\text{ع ت}^2$$

بعض سوالات میں جیسے حرکت زیر جاذبہ میں اسراع مستقل ہے اور نیچے کی طرف تقریباً ۳۲ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ کے مساوی ہے اس کو اکثر ج سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ اگر فاصلہ کے محور کو اوپر کی جانب مثبت لیا جائے تو ع = -ج ہوگا اور مساوات میں مناسب ترمیم کرنی پڑیگی۔

مثال (۲) ایک ذرّہ خطِ مستقیم میں حرکت کر رہا ہے اور اس کا اسراع خط کے ایک ثابت نقطہ کی طرف ہے اور فاصلہ کے تناسب ہے۔ حرکت دریافت کرو۔ فرض کرو کہ ثابت نقطہ کو مبداء لیا جاتا ہے اور وقت ت پر ذرّہ کا فاصلہ لا اور رفتار ی ہے

$$\text{تو}\quad \text{ی}\,\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} \propto -\text{لا}$$

$= -$ ک$^2$ لا جہاں ک$^2$ ثبت مستقل ہے۔

$\therefore$ $ر^2 = -$ ک$^2$ لا$^2$ $+$ م جہاں م مستقل ہے۔

اب اگر ابتدائے حرکت پر ذرّہ کو فاصلہ او سے صفر رفتار سے چھوڑ دیا جاتا ہے تو

ر $= ۰$ جبکہ لا $=$ او اور ت $= ۰$

$\therefore$ $ر^2 =$ ک$^2$ (او$^2$ $-$ لا$^2$)

$\therefore$ ر $= \pm$ ک $\sqrt{او^2 - لا^2}$

مبدا ———— او

اگر ذرّہ کو صفر رفتار سے چھوڑ دیا جاتا ہے تو ظاہر ہے کہ کشش کے زیر عمل یہ مبداء کی طرف حرکت کریگا یعنی ر $= \frac{فرلا}{فرت} = -$ک $\times \sqrt{او^2 - لا^2}$

$\therefore$ $- \int \frac{فرلا}{\sqrt{او^2 - لا^2}} = \int$ ک فرت

$\therefore$ جم$^{-1}$ $\frac{لا}{او}$ $=$ ک ت $+$ مستقل م$_2$

$\therefore$ $\frac{لا}{او}$ $=$ جم (ک ت $+$ م$_2$)

اب لا $=$ او جبکہ ت $= ۰$

$\therefore$ ۱ $=$ جم (م$_2$) $\therefore$ م$_2$ $=$ صفر

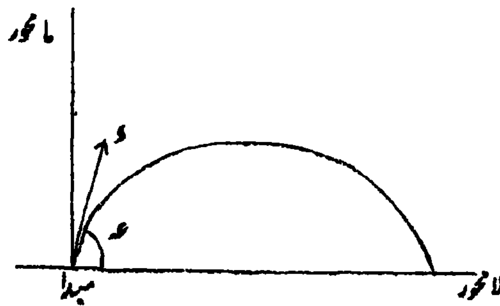
اور لا $=$ او جم ک ت

مثال (۳) ایک ذرہ کو ابتدائی رفتار ۔ و سے اُفق سے زاویہ ھ پر پھینک دیا گیا ہے۔ اگر حرکت جاذبہ کے زیرِ عمل ہو اور ہوا کی مزاحمت کو نظر انداز کر دیا جائے تو طریق دریافت کرو۔

ذرّہ ایک انتصابی مستوی میں حرکت کریگا۔ نقطۂ رمی کو مبدا مان لو اور

حرکت کی سمت میں اُفقی خط کو لا محور اور انتصابی خط کو ما محور لو۔ اور فرض کرو کہ صفر وقت پر ذرّہ نے مبداء سے حرکت شروع کی۔ تو لا اور ما محور کی سمت میں وقت ت کے بعد

$$\frac{\text{فر}^{2}\,\text{لا}}{\text{فرت}^{2}} = \text{صفر}$$




$$\text{اور}\quad \frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فرت}^{2}} = -\text{ج}\quad \text{جہاں ج جاذبہ کا اسراع ہے۔}$$

$$\text{تکمل کرنے سے}\quad \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \text{مستقل}$$

$$\text{اور}\quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} = -\text{ج ت} + \text{مستقل}$$

$$\text{اب}\quad \text{ت} = ۰ \quad \text{تو}\quad \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \text{ءجم عہ}$$

$$\text{اور}\quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} = \text{ءجب عہ}$$

$$\therefore\quad \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \text{ءجم عہ}$$

$$\text{اور}\quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} = -\text{ج ت} + \text{ءجب عہ}$$

$$\text{دوبارہ تکمل کرنے سے}\quad \text{لا} = \text{ت ءجم عہ} + \text{مستقل}$$

$$\text{ما} = -\tfrac{1}{2}\,\text{ج ت}^{2} + \text{ءجب عہ} \times \text{ت} + \text{مستقل}$$

چونکہ لا = ما = ۰ جبکہ ت = ۰ اس لیے لا اور ما کے مستقل صفر ہیں۔

پس لا = ء جم عہ × ت

ما = ء جب عہ × ت ۔ $\frac{۱}{۲}$ ج ت$^{۲}$

یہ طریق کی تبدل مساوات ہے۔ اس میں سے ت ساقط کرنے سے طریق کی کارٹیزی مساوات ما = لا مس عہ ۔ $\frac{۱}{۲}$ ج $\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ء}^{۲} \text{جم}^{۲} \text{عہ}}$ حاصل ہوتی ہے۔
یہ طریق ایک مکافی ہے۔

(۴) ایک ریل کو مستقل ابطاء لگا کر روکا جاتا ہے۔ اگر ابطاء لگانے کے بعد پہلے ثانیہ میں ۷۰ فٹ کا فاصلہ اور دوسرے ثانیہ میں ۵۰ فٹ کا فاصلہ طے کرے تو ریل کی ابتدائی رفتار، رکنے تک وقت اور طے شدہ فاصلہ معلوم کرو۔

(۵) دو مقاموں کے درمیان فاصلہ ا فٹ ہے۔ ریل ایک مقام سے مستقل اسراع ع سے حرکت شروع کرتی ہے کچھ دیر بعد اسراع روک کر ابطاء ‘ع لگا دیا جاتا ہے اور دوسرے مقام پر ریل عین رک جاتی ہے۔ ثابت کرو کہ ایک مقام سے دوسرے مقام تک جانے میں $\sqrt{۲ \text{ا} \frac{\text{ع} + \text{ع}'}{\text{ع ع}'}}$ ثانیہ لگتا ہے۔

(۶) ذیل میں خطی حرکت میں فاصلہ اور وقت میں رشتہ دیا گیا ہے۔ رفتار اور اسراع مطلوبہ آن پر دریافت کرو۔

(ا) س = ۴۸ ت ۔ ۱۶ ت$^{۲}$ جبکہ ت = $\frac{۳}{۴}$ ، $\frac{۳}{۲}$ ثانیہ

(ب) لا = ا جم $\frac{۲ \text{ت}}{۳}$ جبکہ ت = $\frac{۱}{۲}$ ، ۱ ، $\frac{۳}{۲}$ ثانیہ

(ج) لا = ب قو$^{۲\text{ت}}$ جبکہ ت = ۱ ثانیہ

(د) ما = ۲ ت ۔ ت$^{۳}$ جبکہ ت = صفر ، ۱ ثانیہ

(۷) اگر ایک ذرّہ خط مستقیم میں حرکت کر رہا ہو اور فاصلہ اور وقت میں رشتہ ج = $\sqrt{\text{ت}}$ ہو تو ثابت کرو کہ اسراع رفتار کے مکعب کی طرح

بدلتی ہے۔

(۸) اگر فاصلہ اور وقت میں رشتہ س = ا وت + ب وت ہو تو ثابت کرو کہ اسراع طے شدہ فاصلہ کے مساوی ہے۔

(۹) اگر مستوی میں حرکت کی صورت میں وقت اور فاصلوں میں رشتے

لا = ا جم ت + ب اور ا = ا جب ت + د

تو ثابت کرو کہ رفتار مستقل ہے۔

(۱۰) اگر ایک ذرہ خطِ مستقیم میں ایسے اسراع کے زیرِ عمل حرکت کرے کہ اسراع فاصلہ کے متناسب ہو۔ اور ابتدائی رفتار صفر ہو تو فاصلہ اور وقت میں رشتہ دریافت کرو۔

(۱۱) ایک ذرہ کی خطِ مستقیم میں حرکت سکون سے ایسے اسراع کے زیرِ عمل ہے جو ایک ثابت نقطہ کی طرف ہے اور فاصلہ کے چار گنا کے مساوی ہے اور ابتدا میں ذرہ ثابت نقطہ سے ۳ فٹ کے فاصلہ پر ہو تو فاصلہ اور وقت میں رشتہ دریافت کرو۔ نیز بتاؤ کہ ۵ ثانیہ کے بعد رفتار اور فاصلہ کیا ہوگا۔

(۱۲) ایک ذرہ کو انتصابی مستوی میں ۲۴ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے افق سے (۱) °۳۰ اور (۲) °۴۵ اور (۳) °۶۰ پر پھینکا جاتا ہے۔ بتاؤ کہ نقطہ رمی میں افقی مستوی پر وہ کس فاصلہ پر گریگا اور کتنی دیر بعد گریگا۔ نیز ذرہ کی زیادہ سے زیادہ بلندی دریافت کرو۔

## ۹۲ر۴ - شرح تبدیلی کے دیگر اطلاقات :- 

جیسا اوپر بیان کیا گیا ہے تفرقی سر شرح تبدیلی کو ناپنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ ذیل میں مختلف قسم کی مثالوں سے اس کے چند اطلاقات کو واضح کیا جائیگا۔

مثال (۱) ایک گیس کے پھیلنے کا حرناگذار قانون د ح^{۱٫۴} = مستقل ہے، جہاں د دباؤ اور ح حجم ہے۔ کسی آن میں حجم ۱۰ مکعب فٹ ہے اور دباؤ ۵۰ پونڈ فی مربع انچ ہے۔ اگر حجم اس وقت بشرح ایک مکعب فٹ فی ثانیہ گھٹ رہا ہو تو دباؤ کے بدلنے کی شرح معلوم کرو۔

اب $\text{د ح}^{1.4} = \text{مستقل}$ اور $\frac{\text{فرح}}{\text{فرت}} = -1$ جہاں ت وقت کو تعبیر کرتا ہے۔
اس کو بلحاظ وقت ت کے تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{د} \times 1.4 \times \text{ح}^{0.4} \times \frac{\text{فرح}}{\text{فرت}} + \frac{\text{فرد}}{\text{فرت}} \times \text{ح}^{1.4} = \text{صفر}$$

$$\therefore \frac{\text{فرد}}{\text{فرت}} = -\frac{1.4 \times \text{د} \times \text{ح}^{0.4}}{\text{ح}^{1.4}} \times \frac{\text{فرح}}{\text{فرت}} = -\frac{1.4\,\text{د}}{\text{ح}} \cdot \frac{\text{فرح}}{\text{فرت}}$$

$$= -\frac{1.4 \times 50}{10} \times (-1)$$

= ۰ ، ۷ پونڈ فی مربع انچ

یعنی دباؤ ، پونڈ فی مربع انچ فی ثانیہ کی شرح سے بڑھ رہا ہے۔

مثال (۳) ایک مخروط کے قاعدہ کا نصف قطر ۱" فی منٹ کی شرح سے گھٹ رہا ہے۔ اور ارتفاع ۳" فی منٹ کی شرح سے بڑھ رہا ہے۔ اگر کسی آن میں نصف قطر ۱۸" ہو اور ارتفاع ۲۴" ہو تو بتاؤ اس وقت حجم اور مخروط کی مائل سطح کس شرح سے بدل رہے ہیں۔

فرض کرو کہ وقت ت پر مخروط کا ارتفاع ھ اور قاعدہ کا نصف قطر ر ہے۔

$$\therefore \text{حجم ح} = \frac{1}{3} \times \text{ھ} \times \pi\,\text{ر}^2$$

$$\text{اور سطح س} = \frac{1}{2} \times 2\pi\,\text{ر} \times \sqrt{\text{ھ}^2 + \text{ر}^2} = \pi\,\text{ر} \times \sqrt{\text{ھ}^2 + \text{ر}^2}$$

$$\text{اب } \frac{\text{فرح}}{\text{فرت}} = \frac{\pi}{3}\left(\frac{\text{فرھ}}{\text{فرت}}\,\text{ر}^2 + 2\,\text{ھ ر}\,\frac{\text{فرر}}{\text{فرت}}\right) = \frac{\pi}{3}\left[18 \times 18 \times 3 + 2 \times 24 \times 18\,(-1)\right]$$

$$= \pi \times 18 \times 2\,(27 - 24) = 108\,\pi$$

$$\text{اور } \frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = \pi\,\frac{\text{ر ھ}}{\sqrt{\text{ھ}^2 + \text{ر}^2}}\,\frac{\text{فرھ}}{\text{فرت}} + \left[\pi\sqrt{\text{ھ}^2 + \text{ر}^2} + \frac{\pi\,\text{ر}^2}{\sqrt{\text{ھ}^2 + \text{ر}^2}}\right]\frac{\text{فرر}}{\text{فرت}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{\text{ھ}^2 + \text{ر}^2}}\left[\text{ھ ر}\,\frac{\text{فرھ}}{\text{فرت}} + (\text{ھ}^2 + 2\,\text{ر}^2)\,\frac{\text{فرر}}{\text{فرت}}\right] = \frac{\pi}{30}\left[18 \times 24\,(3) + (24^2 + 18^2 \times 2)(-1)\right]$$

$= \frac{\pi}{30}(1224-1296) = \frac{12}{5}\pi$

یعنی حجم ۱۰۸ $\pi$ مکعب انچ فی فٹ بڑھ رہا ہے اور سطح $\frac{14\pi}{5}$ مربع انچ فی منٹ بڑھ رہی ہے۔

(۳) ایک کرہ کا حجم ۱۶ مکعب انچ فی ثانیہ بڑھ رہا ہے۔ بتاؤ کہ نصف قطر اور کرہ کی سطح کس شرح سے بڑھ رہی ہے جبکہ کرہ کا نصف قطر ۶" ہے۔

(۴) ایک ۶ فٹ قد والا آدمی روشنی کے مبدا، سے جو فرش سے ۱۵ فٹ کی اونچائی پر لٹک رہا ہے ۳ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے دُور ہٹ رہا ہے۔ بتاؤ کہ سایہ کا آخری سرا کس شرح سے حرکت کر رہا ہے۔ نیز بتاؤ کہ سایہ کا طول کس شرح سے بڑھ رہا ہے۔

(۵) ایک ۲۴ فٹ لمبی سیڑھی دیوار کے ساتھ رکھی ہوئی ہے۔ اس کا نچلا سرا دیوار سے ۸ فٹ کے فاصلہ پر ہے۔ اگر سیڑھی کا نچلا سرا ۳ فٹ فی ثانیہ کے حساب سے دیوار سے دُور ہٹ رہا ہے تو اوپر کے سرے کی حرکت کی شرح دریافت کرو۔

(۶) ایک منحنی کی مساوات $ما^۲ = ۲ لا$ ہے۔ اگر لا کی قیمت $\frac{1}{4}$ اکائیاں فی ثانیہ گھٹ رہی ہو تو بتاؤ نقطہ (۸، -۴) پر ڈھال کس شرح سے گھٹ رہا ہے۔

(۷) اگر $ما = لا + \frac{1}{لا}$ تو ما کے بدلنے کی اوسط شرح بلحاظ لا کے معلوم کرو جبکہ لا کی قیمت ۲ سے ۴ تک بدلتی ہے۔ نیز اس آن پر شرح معلوم کرو جبکہ لا = ۲۔

(۸) ایک ذرّہ مکافی سہ $ما = لا^۲$ پر اس طرح حرکت کر رہا ہے کہ اس کا فصلہ فی ثانیہ ۲ اکائیوں کی مستقل شرح سے بڑھ رہا ہے تو بتاؤ کہ نقطہ زیر بحث اور نقطہ (۰، ۴) کے درمیان فاصلہ کس شرح سے بدل رہا ہے جبکہ لا = ۲ اور $لا = \sqrt{۸}$

(۹) ایک حوض کی شکل ایک ایسے مستدیر مخروط کی مانند ہے جس کا رأس نیچے ہے اور قطر ارتفاع کے مساوی ہے۔ بتاؤ اس کے اندر پانی کس شرح سے

ڈالا جا رہا ہے جبکہ گہرائی ۵ʹ ہے اور گہرائی بحساب ۴ʺ فی منٹ کے بڑھ رہی ہے۔

(۱۰) ایک آدمی ۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے ایک بُرج کی طرف (جو ۶۰ʹ اونچا ہے) چل رہا ہے۔ اگر وہ بُرج کی تہ سے ۸۰ فٹ کے فاصلہ پر ہو تو بتاؤ کہ وہ بُرج کی چوٹی کے نزدیک کس شرح سے آرہا ہے۔

(۱۱) ایک مخروط کے قاعدہ کا قطر ۲ʺ فی منٹ کی شرح سے بڑھ رہا ہے اور ارتفاع ۴ʺ فی منٹ کی شرح سے گھٹ رہا ہے۔ اگر نصف قطر ۱۶ʺ اور ارتفاع ۲۰ʺ ہو تو حجم اور منحنی سطح کے بدلنے کی شرح معلوم کرو۔

(۱۲) ایک مخروطی قیف کا نصف قطر ۳ʺ ہے اور اس کا ارتفاع بھی ۳ʺ ہے۔ اگر ایک مایع اس میں سے بشرح ایک مکعب انچ فی منٹ بہہ رہا ہے تو بتاؤ جبکہ مایع کی سطح چوٹی سے ۲ʺ کی گہرائی پر ہو تو سطح کس شرح سے گر رہی ہے۔

# باب پنجم

# تکمل

## ۵،۱ - غیر معیّن تکملہ کی تعریف -

باب سوم کی دفعہ ۳،۵ میں ہم نے دیکھا ہے کہ اگر کوئی تفاعل ف (لا) دیا ہوا ہو اور ہم ایک دوسرا تفاعل فہ (لا) ایسا معلوم کرسکیں کہ

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\ \text{فہ (لا)} = \text{ف (لا)} \qquad \ldots\ldots \qquad (1)$$

تو تفاعل فہ (لا) کو دیے ہوئے تفاعل ف (لا) کا "تکملہ" اور اس عمل کو جس کے ذریعہ تفاعل فہ (لا) معلوم کیا جاتا ہے "عملِ تکمل" کہتے ہیں اور اس کو ظاہر کرنے کے لیے حسبِ ذیل ترقیم اختیار کی جاتی ہے:-

$$\text{فہ (لا)} = \int \text{ف (لا) فرلا} \qquad \ldots\ldots \qquad (2)$$

نیز تفاعل ف (لا) کو "متکمل" کہا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر ہم نے دیکھا تھا کہ اگر ف (لا) = ۵لا$^{۴}$ + ۳لا$^{۲}$ + ۴ ہو تو وہ تفاعل جس کا تفرقی ثمرہ ۵لا$^{۴}$ + ۳لا$^{۲}$ + ۴ ہو لا$^{۵}$ + لا$^{۳}$ + ۴ لا ہے اور اس لیے لا$^{۵}$ + لا$^{۳}$ + ۴ لا تفاعل ۵لا$^{۴}$ + ۳لا$^{۲}$ + ۴ کا تکملہ ہے۔

لیکن اگر ہم ایک تفاعل ۲ لا^۲ + ۳ لا لیں اور اس کو تفرق کریں تو

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left(\text{۲ لا}^{\text{۲}} + \text{۳ لا}\right) = \text{۴ لا} + \text{۳}$$

اس کے بعد اگر ہم ۴ لا + ۳ کو پھر تکمل کریں تو

$$\int (\text{۴ لا} + \text{۳})\ \text{فرلا} = \text{۴}\cdot\frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\text{۲}} + \text{۳ لا} = \text{۲ لا}^{\text{۲}} + \text{۳ لا}$$

یعنے وہی ابتدائی تفاعل ۲ لا^۲ + ۳ لا حاصل ہوتا ہے - اس سے ظاہر ہے کہ تکمل اور تفرق کے عمل بالکل اسی طرح ایک دوسرے کے مقلوب عمل ہیں جیسے کہ عمل جمع وتفریق، ضرب وتقسیم، جذر و مربع، لوکارتم و قوت نما، وغیرہ۔

اوپر ہم نے بتلایا ہے کہ

$$\int (\text{۴ لا} + \text{۳})\ \text{فرلا} = \text{۲ لا}^{\text{۲}} + \text{۳ لا} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (\text{۳})$$

یعنے اگر تفاعل ۲ لا^۲ + ۳ لا کو تفرق کیا جائے ۴ لا + ۳ حاصل ہوتا ہے - لیکن ہم کو معلوم ہے کہ

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left(\text{۲ لا}^{\text{۲}} + \text{۳ لا} + \text{۱۰}\right) = \text{۴ لا} + \text{۳}$$

پس تفاعل ۴ لا + ۳ کا تکملہ ۲ لا^۲ + ۳ لا + ۱۰ بھی ہو سکتا ہے - اگر عدد ۱۰ کے بجائے ہم کوئی دوسرا عدد رکھیں تب بھی یہی نتیجہ نکلتا ہے اس لیے تکمل کا مذکورۂ بالا عمل اس طرح کامل طور پر معین نہیں ہے جس طرح تفرق کا عمل معین ہے - یعنی اگر ہم کسی دیے ہوئے تفاعل کو تفرق کریں تو ہم نے دیکھا ہے کہ اس عمل سے ایک اور صرف ایک ہی تفاعل تفرقی سر کے طور پر حاصل ہوتا ہے - اس کے برخلاف ہم اب دیکھتے ہیں کہ ایسے بے شمار تفاعل ہیں جن کو تفرق کرنے سے ایک دیا ہوا تفاعل حاصل ہو سکتا ہے - یہ تمام تفاعل ایک دوسرے سے بقدر ایک مستقل عدد کے مختلف ہوتے ہیں۔

اس لیے مساوات (۳) کی بجائے یہ لکھنا زیادہ صحیح ہے کہ

∫ (۴لا + ۳) فرلا = ۲لا۲ + ۳ لا + ک ............ (۴)

جہاں ک ایک اختیاری عدد ہے جو -∞ سے +∞ تک تمام قیمتیں اختیار کر سکتا ہے۔ ک کو "تکمل کا مستقل" کہتے ہیں اور چونکہ مساوات (۴) میں ک بالکل معین نہیں بلکہ اختیاری ہے اس لیے ۲لا۲ + ۳لا + ک کو (۴لا + ۳) کا "غیر معین تکملہ" کہتے ہیں۔

اس طرح عام طور پر اگر ایک تفاعل ف (لا) دیا ہوا ہو اور فہ (لا) اختیاری مستقل کو شامل کیے بغیر ایک ایسا تفاعل ہو کہ

فر/فرلا فہ (لا) = ف (لا)

تو ہم یوں لکھتے ہیں کہ

∫ ف (لا) فرلا = فہ (لا) + ک ..... (۵)

اور فہ (لا) + ک کو ف (لا) کا غیر معین تکملہ کہتے ہیں۔

## ۵،۲۔ ابتدائی معیاری شکلیں۔

دفعہ ۳،۲ باب سوم میں جن اہم تفاعلوں کے تفرقی سر ہم نے دریافت کیے ہیں ان کے مقلوب لینے سے ہم کو حسب ذیل تکملے فوراً حاصل ہوتے ہیں۔ طالب علم کو چاہیے کہ تفرق کر کے ان میں سے ہر ایک نتیجہ کی تصدیق کرے اور آئندہ استعمال کے لیے انہیں بخوبی ذہن نشین کر لے۔

(۱) ∫ ھ فرلا = ھ لا + ک جہاں ھ ایک دیا ہوا مستقل عدد ہے۔

(۲) ∫ ھ ف (لا) فرلا = ھ ∫ ف (لا) فرلا

(۳) ∫ {ف۱ (لا) ± ف۲ (لا) ± ف۳ (لا) ± .....} فرلا
= ∫ ف۱ (لا) فرلا ± ∫ ف۲ (لا) فرلا ± ∫ ف۳ (لا) فرلا + ....

(۴) ∫ لان فرلا = لان+۱/ن+۱ + ک جہاں ن کوئی مثبت منفی صحیح یا کسری عدد ہے سوائے -۱ کے۔

(۵) $$\int \frac{\text{۱}}{\text{لا}}\ \text{فرلا} = \text{لوک}_{\text{و}}\ \text{لا} + \text{ک}$$

(۶) $$\int \text{و}^{\text{لا}}\ \text{فرلا} = \text{و}^{\text{لا}} + \text{ک}$$

(۷) $$\int \text{ا}^{\text{لا}}\ \text{فرلا} = \frac{\text{ا}^{\text{لا}}}{\text{لوک}_{\text{و}}\ \text{ا}} + \text{ک}$$

(۸) $$\int \text{جب لا فرلا} = \text{جم لا} + \text{ک}$$

(۹) $$\int \text{جم لا فرلا} = -\ \text{جب لا} + \text{ک}$$

(۱۰) $$\int \text{قط}^{\text{۲}}\ \text{لا فرلا} = \text{مس لا} + \text{ک}$$

(۱۱) $$\int \text{قم}^{\text{۲}}\ \text{لا فرلا} = -\ \text{مم لا} + \text{ک}$$

(۱۲) $$\int \text{مس لا قط لا فرلا} = \text{قط لا} + \text{ک}$$

(۱۳) $$\int \text{مم لا قم لا فرلا} = -\ \text{قم لا} + \text{ک}$$

(۱۴) $$\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}}}} = \text{جب}^{-\text{۱}}\ \text{لا} + \text{ک}$$
$$= -\ \text{جم}^{-\text{۱}}\ \text{لا} + \text{کَ}$$

(۱۵) $$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{۱} + \text{لا}^{\text{۲}}} = \text{مس}^{-\text{۱}}\ \text{لا} + \text{ک}$$
$$= -\ \text{مم}^{-\text{۱}}\ \text{لا} + \text{کَ}$$

(۱۶) $$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^{\text{۲}} - \text{۱}}} = \text{قط}^{-\text{۱}}\ \text{لا} + \text{ک}$$
$$= -\ \text{قم}^{-\text{۱}}\ \text{لا} + \text{کَ}$$

ان کے علاوہ اور بھی چند آسان تکملے ہیں جن کی ہم کو اکثر ضرورت پڑتی ہے اور جن کی قیمت ہم اب معلوم کرینگے -

(۱۷) فرض کرو کہ ما = لوک قطلا، قطلا = ی، پس ما = لوک ی
تب دفعہ ۶، ۳ کے حصہ (۵) میں بتلائے ہوئے تفاعل کے تفاعل کو تفرق کرنے کے قاعدہ سے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فری}} \times \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\text{ی}} \times \text{مس لا قطلا} = \frac{1}{\text{قطلا}} \times \text{مس لا قطلا}$$

$$= \text{مس لا}$$

اس لیے معلوم ہوا کہ لوک قط لا وہ تفاعل ہے جس کا تفرقی سر مس لا ہے یعنے

$$\int \text{مس لا فرلا} = \text{لوک قط لا} + \text{ک}$$

(۱۸) اگر ما = لوک جب لا، جب لا = ی پس ما = لوک ی

تو
$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فری}} \times \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\text{ی}} \times \text{جم لا} = \frac{\text{جم لا}}{\text{جب لا}} = \text{مم لا}$$

اس لیے

$$\int \text{مم لا فرلا} = \text{لوک جب لا} + \text{ک}$$

(۱۹) اگر ما = لوک (قط لا + مس لا)،

تب

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\text{قط لا} + \text{مس لا}} \cdot (\text{مس لا قط لا} + \text{قط}^2 \text{لا})$$

$$= \text{قط لا} \frac{(\text{مس لا} + \text{قط لا})}{\text{قط لا} + \text{مس لا}} = \text{قط لا}$$

نیز اگر ما = لوک مس $\left(\frac{\text{لا}}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$، ی = مس $\left(\frac{\text{لا}}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$، ع = $\frac{\text{لا}}{2} + \frac{\pi}{4}$

تو ی = مس ع، ما = لوک ی

اس لیے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فری}} \times \frac{\text{فری}}{\text{فرع}} \times \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}$$

پس
$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\text{ی}} \times \text{قط}^2 \text{ع} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{\text{قط}^2\left(\frac{\text{لا}}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\text{مس}\left(\frac{\text{لا}}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$$ ..

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\text{جم}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\text{لا}}{2}\right)}{\text{جب}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\text{لا}}{2}\right)} \times \frac{1}{\text{جم}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\text{لا}}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2\,\text{جب}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\text{لا}}{2}\right)\text{جم}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\text{لا}}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{\text{جب}\left(2\frac{\pi}{4}+2\frac{\text{لا}}{2}\right)} = \frac{1}{\text{جب}\left(\text{لا}+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\text{جم لا}}$$

$$= \text{قط لا}$$

پس

$$\int \text{قط لا فرلا} = \text{لوک}\,(\text{مس لا} + \text{قط لا}) + \text{ک}$$

$$= \text{لوک مس}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\text{لا}}{2}\right) + \text{کَ}$$

(۲۰) اگر $\text{ما} = \text{لوک}\,(\text{قم لا} - \text{مم لا})$

تو $$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\text{قم لا} - \text{مم لا}}\left(-\text{قم لا مم لا} + \text{قم}^2\text{لا}\right)$$

$$= \frac{1}{\text{قم لا} - \text{مم لا}} \times \text{قم لا}\,(\text{قم لا} - \text{مم لا}) = \text{قم لا}$$

نیز اگر $\text{ما} = \text{لوک مس}\,\frac{\text{لا}}{2}$

تو $$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\text{مس}\frac{\text{لا}}{2}} \times \frac{1}{2}\,\text{قط}^2\frac{\text{لا}}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{\text{جم}\frac{\text{لا}}{2}}{\text{جب}\frac{\text{لا}}{2}} \times \frac{1}{\text{جم}^2\frac{\text{لا}}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\,\text{جب}\frac{\text{لا}}{2}\,\text{جم}\frac{\text{لا}}{2}} = \frac{1}{\text{جب لا}} = \text{قم لا}$$

پس

$$\int \text{قم لا فرلا} = \text{لوک}\,(\text{قم لا} - \text{مم لا}) + \text{ک}$$

$$= \text{لوک مس}\,\frac{\text{لا}}{2} + \text{کَ}$$

(۲۱) اگر $\text{ما} = \frac{\text{لا}}{۲}\sqrt{\text{لا}^۲ + \text{و}^۲} + \frac{\text{و}^۲}{۲}\,\text{لوک}\left(\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^۲ + \text{و}^۲}\right)$

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{۱}{۲}\sqrt{\text{لا}^۲ + \text{و}^۲} + \frac{\text{لا}}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۲\,\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}^۲ + \text{و}^۲}}\right) + \frac{\text{و}^۲}{۲}\cdot\frac{۱ + \frac{۱}{۲}\cdot\frac{۲\,\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}^۲ + \text{و}^۲}}}{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^۲ + \text{و}^۲}}$$

$$= \frac{۱}{۲}\sqrt{\text{لا}^۲ + \text{و}^۲} + \frac{\text{لا}^۲}{۲\sqrt{\text{لا}^۲ + \text{و}^۲}} + \frac{\text{و}^۲}{۲\sqrt{\text{لا}^۲ + \text{و}^۲}}$$

$$= \frac{۱}{۲}\sqrt{\text{لا}^۲ + \text{و}^۲} + \frac{۱}{۲}\sqrt{\text{لا}^۲ + \text{و}^۲} = \sqrt{\text{لا}^۲ + \text{و}^۲}$$

پس $\int \sqrt{\text{لا}^۲ + \text{و}^۲}\ \text{فرلا} = \frac{\text{لا}}{۲}\sqrt{\text{لا}^۲ + \text{و}^۲} + \frac{\text{و}^۲}{۲}\,\text{لوک}\left(\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^۲ + \text{و}^۲}\right) + \text{ک}$

(۲۲) بالکل اسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے کہ

$$\int \sqrt{\text{لا}^۲ - \text{و}^۲}\ \text{فرلا} = \frac{\text{لا}}{۲}\sqrt{\text{لا}^۲ - \text{و}^۲} - \frac{\text{و}^۲}{۲}\,\text{لوک}\left(\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^۲ - \text{و}^۲}\right) + \text{ک}$$

(۲۳) اگر $\text{ما} = \frac{\text{لا}}{۲}\sqrt{\text{و}^۲ - \text{لا}^۲} + \frac{\text{و}^۲}{۲}\,\text{جب}^{-۱}\frac{\text{لا}}{\text{و}}$

تو $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{۱}{۲}\sqrt{\text{و}^۲ - \text{لا}^۲} + \frac{\text{لا}}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\cdot\frac{-۲\,\text{لا}}{\sqrt{\text{و}^۲ - \text{لا}^۲}}\right) + \frac{\text{و}^۲}{۲}\left\{\frac{۱}{\sqrt{۱ - \frac{\text{لا}^۲}{\text{و}^۲}}} \times \frac{۱}{\text{و}}\right\}$

$$= \frac{۱}{۲}\sqrt{\text{و}^۲ - \text{لا}^۲} - \frac{۱}{۲}\cdot\frac{\text{لا}^۲}{\sqrt{\text{و}^۲ - \text{لا}^۲}} + \frac{\text{و}^۲}{۲}\cdot\frac{۱}{\sqrt{\text{و}^۲ - \text{لا}^۲}}$$

$$= \frac{۱}{۲}\sqrt{\text{و}^۲ - \text{لا}^۲} + \frac{۱}{۲}\sqrt{\text{و}^۲ - \text{لا}^۲} = \sqrt{\text{و}^۲ - \text{لا}^۲}$$

پس $\int \sqrt{\text{و}^۲ - \text{لا}^۲}\ \text{فرلا} = \frac{\text{لا}}{۲}\sqrt{\text{و}^۲ - \text{لا}^۲} + \frac{\text{و}^۲}{۲}\,\text{جب}^{-۱}\frac{\text{لا}}{\text{و}} + \text{ک}$

(۲۴) اگر $\text{ما} = \frac{۱}{\text{و}}\,\text{مس}^{-۱}\frac{\text{لا}}{\text{و}}$

تو $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{۱}{\text{و}}\cdot\frac{۱}{\frac{\text{لا}^۲}{\text{و}^۲} + ۱} \times \frac{۱}{\text{و}} = \frac{۱}{\text{لا}^۲ + \text{و}^۲}$

پس $\int \frac{۱}{\text{لا}^۲ + \text{و}^۲}\ \text{فرلا} = \frac{۱}{\text{و}}\,\text{مس}^{-۱}\frac{\text{لا}}{\text{و}} + \text{ک}$

(۲۵) اگر $\text{ما} = \frac{۱}{۲\,\text{و}}\,\text{لوک}\,\frac{\text{و} + \text{لا}}{\text{و} - \text{لا}}$

تو $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\text{۲و}} \cdot \frac{\text{و} - \text{لا}}{\text{و} + \text{لا}} \cdot \frac{1(\text{و} - \text{لا}) + 1(\text{و} + \text{لا})}{(\text{و} - \text{لا})^{2}}$

$= \frac{1}{\text{۲و}} \cdot \frac{\text{و} - \text{لا}}{\text{و} + \text{لا}} \cdot \frac{\text{۲و}}{(\text{و} - \text{لا})^{2}} = \frac{1}{\text{و}^{2} - \text{لا}^{2}}$

پس $\int \frac{1}{\text{و}^{2} - \text{لا}^{2}}\ \text{فرلا} = \frac{1}{\text{۲و}}\ \text{لوک}\ \frac{\text{و} + \text{لا}}{\text{و} - \text{لا}} + \text{ک}$

(۲۶) اگر ما $= \frac{1}{\text{۲و}}\ \text{لوک}\ \frac{\text{لا} - \text{و}}{\text{لا} + \text{و}}$

تو $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\text{۲و}} \cdot \frac{\text{لا} + \text{و}}{\text{لا} - \text{و}} \cdot \frac{(\text{لا} + \text{و}) - (\text{لا} - \text{و})}{(\text{لا} + \text{و})^{2}} = \frac{1}{\text{لا} - \text{و}}\ \frac{1}{\text{لا} + \text{و}}$

$= \frac{1}{\text{لا}^{2} - \text{و}^{2}}$

پس $\int \frac{1}{\text{لا}^{2} - \text{و}^{2}}\ \text{فرلا} = \frac{1}{\text{۲و}}\ \text{لوک}\ \frac{\text{لا} - \text{و}}{\text{لا} + \text{و}} + \text{ک}$

(۲۷) اگر ما $= \text{لوک}\ (\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^{2} + \text{و}^{2}})$

تو $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^{2} + \text{و}^{2}}} \times \left(1 + \frac{1}{2}\ \frac{\text{۲لا}}{\sqrt{\text{لا}^{2} + \text{و}^{2}}}\right)$

$= \frac{1}{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^{2} + \text{و}^{2}}} \times \frac{\sqrt{\text{لا}^{2} + \text{و}^{2}} + \text{لا}}{\sqrt{\text{لا}^{2} + \text{و}^{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\text{لا}^{2} + \text{و}^{2}}}$

پس $\int \frac{1}{\sqrt{\text{لا}^{2} + \text{و}^{2}}}\ \text{فرلا} = \text{لوک}\ (\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^{2} + \text{و}^{2}}) + \text{ک}$

(۲۸) اگر ما $= \text{لوک}\ (\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^{2} - \text{و}^{2}})$

تو $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^{2} - \text{و}^{2}}} \times \left(1 + \frac{1}{2}\ \frac{\text{۲لا}}{\sqrt{\text{لا}^{2} - \text{و}^{2}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\text{لا}^{2} - \text{و}^{2}}}$

پس $\int \frac{1}{\sqrt{\text{لا}^{2} - \text{و}^{2}}}\ \text{فرلا} = \text{لوک}\ (\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^{2} - \text{و}^{2}}) + \text{ک}$

(۲۹) اگر ما $= \text{جب}^{-1}\ \frac{\text{لا}}{\text{و}}$

$$\text{تو}\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\text{لا}^2}{\text{د}^2}}} \times \frac{1}{\text{د}} = \frac{1}{\text{د}} \times \frac{\text{د}}{\sqrt{\text{د}^2-\text{لا}^2}} = \frac{1}{\sqrt{\text{د}^2-\text{لا}^2}}$$

$$\text{پس}\ \int \frac{1}{\sqrt{\text{د}^2-\text{لا}^2}}\,\text{فرلا} = \text{جب}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{د}} + \text{ک}$$

یہی بنیادی تکملے ہیں جنھیں طالب علم کو اچھی طرح ذہن نشین کرنا اور یاد رکھنا چاہیے۔ اکثر و بیشتر پیچیدہ تفاعلوں کے تکملے انہی کی مدد سے معلوم کیے جا سکتے ہیں۔ کسی دیے ہوئے تفاعل کو تکمل کرنے کے لیے سب سے پہلے ہمیں یہ غور کرنا چاہیے کہ آیا وہ ان معیاری شکلوں میں سے کسی شکل کا ہے یا نہیں۔ اگر ہے تو ہم فوراً تکملہ لکھ دے سکتے ہیں۔ اگر دیا ہوا تفاعل اوپر کی معیاری شکلوں میں سے کسی شکل کا نہیں ہے تو پھر کوشش کرنا چاہیے کہ کسی طرح کی تبدیلی وغیرہ کر کے ان تفاعلوں کو اوپر کی شکلوں میں سے کسی ایک میں یا ان میں سے چند کے مجموعہ میں تحویل کریں اور اس طرح تکملہ معلوم کریں۔ آیندہ دفعات میں ہم چند سادہ طریقے بتلائینگے جن کی مدد سے دیے ہوئے تکملوں کو معیاری شکل میں تحویل کیا جا سکتا ہے۔ یاد رہے کہ اس طرح سے صرف چند تفاعل ہی تکمل ہو سکتے ہیں۔ تفاعلوں کی ایک بہت بڑی تعداد ایسی ہے جن کو ہم کسی معلومہ معیاری شکل میں تحویل نہیں کر سکتے۔ ایسے تفاعلوں کے تکملے اُن تفاعلوں کی رقوم میں جن سے ہم اب تک واقف ہیں وجود نہیں رکھتے۔

اس طرح عمل تفرق اور عمل تکمل میں بنیادی فرق ہے۔ ہر طرح کے تفاعل کو خواہ وہ جبری یا مثلثی یا قوت نمائی یا لوکارثمی یا ان میں سے بعض یا سب کا مرکب ہو ہم تفرق کر سکتے ہیں اور حاصل تفاعل اسی طرح کا ایک تفاعل ہوتا ہے لیکن سوائے چند خاص آسان صورتوں کے کسی عام تفاعل کو تکمل نہیں کر سکتے۔ تاہم ہماری عملی ضروریات کے لیے جس قدر تفاعلوں کی ضرورت پڑتی ہے اُن میں سے اکثر تفاعلوں کو تکمل کیا جا سکتا ہے۔ ۳۱۲ کے علاوہ ہر تفاعل کی جس حد تک چاہیں تقریبی قیمت معلوم

کی جا سکتی ہے۔

## مشقی سوالات ۲۲

ذیل کے تفاعلوں کا غیر معیّن تکملہ لکھو:۔

(۱) $\text{ا} + \text{ب}\,\text{لا}$

(۲) $\text{لا}^{3} - ۳\,\text{لا}^{2} + ۴\,\text{لا} - ۷$

(۳) $\dfrac{\text{ا}\,\text{لا} - \text{ب}\sqrt{\text{لا}}}{\text{ا}}$

(۴) $\dfrac{\text{لا}^{3} - ۱۰\,\text{لا}^{2} + ۵}{\text{لا}^{2}}$

(۵) $\left(۱ - \dfrac{۱}{\sqrt{\text{لا}}}\right)^{3}$

(۶) $\dfrac{۱}{۲ - \text{لا}^{2}}$

(۷) $\dfrac{۱}{\sqrt{\text{لا}^{2} - ۳}}$

(۸) $\dfrac{۱}{\sqrt{۴ - \text{لا}^{2}}}$

(۹) $\dfrac{۱}{\sqrt{\text{لا}^{2} + ۹}}$

(۱۰) $\sqrt{۱۰۰ - ۴\,\text{لا}^{2}}$

(۱۱) $\text{مس}^{2}\,\text{ط}$

(۱۲) $\text{مم}\,\text{ط} + \text{قم}\,\text{ط}$

(۱۳) $\text{مم}^{2}\,\text{ط} + \text{قم}^{2}\,\text{ط}$

(۱۴) $\text{لا}^{\text{ا}} + ۱۰^{\text{لا}}$

## ۵ ، ۳ - متغیر کی تبدیلی -

تکمل کے لیے اکثر ایسے تفاعل بھی دیے جاتے ہیں جو بظاہر دفعہ ۵، ۲ کی معیاری شکلوں میں سے کسی شکل کے نہیں ہوتے لیکن متغیر کو بدل کر ہم ان کو کسی معیاری شکل میں لا سکتے ہیں۔ اس طریقہ کو پہلے ہم چند آسان مثالوں کے ذریعہ سے واضح کرینگے اور پھر اس کا عام قاعدہ بتلائینگے۔

مثال ۱- $(\text{لا} + \text{ا})^{2}$ کو تکمل کرو۔ ا کوئی مستقل عدد ہے۔

رکھو $\text{م} = \text{لا} + \text{ا}$ یعنے $\text{لا} = \text{م} - \text{ا}$

تو $\dfrac{\text{فرلا}}{\text{فرم}} = ۱$ یعنے $\text{فرلا} = \text{فرم}$

اس لیے $\int (\text{لا} + \text{ا})^{2}\,\text{فرلا} = \int \text{ما}^{2}\,\text{فرما} = \frac{1}{3}\,\text{ما}^{3} + \text{ک}$

$= \frac{1}{3}(\text{لا} + \text{ا})^{3} + \text{ک} \quad \ldots\ldots (1)$

یہاں ہم دیکھتے ہیں کہ اگرچہ $(\text{لا} + \text{ا})^{2}$ کوئی معیاری تفاعل نہیں ہے لیکن ہم اس کو فوراً معیاری شکل کے تفاعل میں تبدیل کر دے سکتے ہیں اگر لا کی بجائے ما - ا رکھا جائے۔

البتہ اس مثال میں خاص طور پر ایک ایسا تفاعل دیا گیا ہے جس کو ہم ابتدائی طریقوں سے بھی حل کر سکتے ہیں کیونکہ

$\int (\text{لا} + \text{ا})^{2}\,\text{فرلا} = \int (\text{لا}^{2} + 2\,\text{الا} + \text{ا}^{2})\,\text{فرلا} = \frac{1}{3}\,\text{لا}^{3} + 2\,\text{ا}\,\frac{\text{لا}^{2}}{2} + \text{ا}^{2}\,\text{لا} + \text{کَ}$

طالب علم پھیلا کر یہ تصدیق کر سکتا ہے کہ اوپر کے تکملہ (۱) اور اس آخری جملہ میں صرف ایک مستقل رقم کا فرق ہے اور چونکہ ک اور کَ اختیاری مستقل ہیں اس لیے اس مستقل رقم کو کَ میں شامل فرض کر سکتے ہیں۔

مثال ۲- $\frac{1}{\text{الا} + \text{ب}}$ کو تکمل کرو- ا اور ب مستقل ہیں۔

رکھو $\text{الا} + \text{ب} = \text{ما}$ یعنے $\text{لا} = \frac{1}{\text{ا}}(\text{ما} - \text{ب})$ پس $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = \frac{1}{\text{ا}}$

$\text{فرلا} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}}\,\text{فرما} = \frac{1}{\text{ا}}\,\text{فرما}$

اس لیے $\int \frac{1}{\text{الا} + \text{ب}}\,\text{فرلا} = \int \frac{1}{\text{ما}}\,\frac{1}{\text{ا}}\,\text{فرما} = \frac{1}{\text{ا}} \int \frac{1}{\text{ما}}\,\text{فرما}$

$= \frac{1}{\text{ا}}\,\text{لوک ما} + \text{ک} = \frac{1}{\text{ا}}\,\text{لوک}\,(\text{الا} + \text{ب}) + \text{ک}$

مثال ۳- $\frac{2\,\text{الا} + \text{ب}}{\text{الا}^{2} + \text{ب لا} + \text{ج}}$ کو تکمل کرو- ا، ب، ج مستقل ہیں۔

اس کسر میں ہمیں دیکھتے ہی معلوم ہوتا ہے کہ شمار کنندہ، نسب نما کا تفرقی سر ہے

پس اگر ہم رکھیں

ما = ا لا² + ب لا + ج، تو فرما/فرلا = ۲ ا لا + ب، فرلا/فرما = ۱/(۲ ا لا + ب)

فرلا = فرلا/فرما = ۱/(۲ ا لا + ب) فرما یعنے (۲ ا لا + ب) فرلا = فرما

اس لیے ∫ (۲ ا لا + ب)/(ا لا² + ب لا + ج) فرلا = ∫ ۱/ما فرما = لوک ما + ک

= لوک (ا لا² + ب لا + ج) + ک

اس سے ہمیں عام طور پر یہ قاعدہ ملتا ہے کہ

∫ ف′(لا)/ف(لا) فرلا = لوک ف(لا) + ک

**مثال ۴۔** (ا لا² + ب لا + ج)^ن (۲ ا لا + ب) کو تکمل کرو۔ ن کوئی مثبت منفی صحیح یا کسری عدد ہے بشرطیکہ ن ≠ -۱

اس مثال میں بھی ہم دیکھتے ہیں کہ ۲ لا + ب جملۂ ا لا² + ب لا + ج کا تفرقی سر ہے، اس لیے اگر ہم رکھیں

ما = ا لا² + ب لا + ج تو اوپر کے عمل سے حاصل ہوتا ہے (۲ ا لا + ب) فرلا = فرما

پس ∫ (ا لا² + ب لا + ج)^ن (۲ ا لا + ب) فرلا = ∫ ما^ن فرما = ما^(ن+۱)/(ن+۱) + ک

= (ا لا² + ب لا + ج)^(ن+۱)/(ن + ۱) + ک

اس مثال میں اگر طالب علم ن کی قیمت مثلاً ۱ ۔ لے اور پھیلانے اور ضرب دینے کے بعد اس تکملہ کی قیمت دریافت کرے تو معلوم ہو جائیگا کہ عمل ابدال کے ذریعہ قیمت معلوم کرنے میں کس قدر سہولت ہوتی ہے ۔ اسی طرح

∫ {ف(لا)}^ن ف′(لا) فرلا = {ف(لا)}^(ن+۱)/(ن + ۱) + ک بشرطیکہ ن ≠ -۱

مثال ۵- $\frac{۱}{لا^۲ + ۶لا + ۱۸}$ کو تکمل کرو۔

معیاری شکلوں کو دیکھنے سے ظاہر ہے کہ اگر متکمل جملہ اس طرح کا ہو کہ

$\frac{۱}{(متغیر)^۲ \pm (مستقل)^۲}$ تو ہم اس کا تکملہ فوراً لکھ سکتے ہیں۔ پس ہم یہ کوشش کرتے ہیں کہ جملہ لا^۲ + ۶ لا + ۱۸ کو اس شکل میں لائیں۔ اس کے لیے پہلے لا^۲ + ۶ لا کو لے کر کامل مربع بنا لینا کافی ہے۔ اس طرح

$$لا^۲ + ۶لا + ۱۸ = (لا + ۳)^۲ + (۱۸ - ۹) = (لا + ۳)^۲ + ۹$$

پھر اگر ہم رکھیں

$$ما = لا + ۳،\ لا = ما - ۳،\ \frac{فرلا}{فرما} = ۱،\ فرلا = فرما$$

تو

$$\int \frac{۱}{لا^۲ + ۶لا + ۱۸} فرلا = \int \frac{۱}{(لا+۳)^۲ + ۹} فرلا$$

$$= \int \frac{۱}{ما^۲ + ۹} فرما = \int \frac{۱}{ما^۲ + ۳^۲} فرما$$

$$= \frac{۱}{۳} مس^{-۱} \frac{ما}{۳} + ک$$

$$= \frac{۱}{۳} مس^{-۱} \left(\frac{لا + ۳}{۳}\right) + ک$$

مثال ۶- $\frac{۱}{\sqrt{الا^۲ + ب لا + ج}}$ کو تکمل کرو، ا، ب، ج کوئی مستقل ہیں۔

معیاری شکلوں سے معلوم ہے کہ $\frac{۱}{\sqrt{(متغیر)^۲ \pm (مستقل)^۲}}$، $\frac{۱}{\sqrt{(مستقل)^۲ - (متغیر)^۲}}$ کی شکل کے جملوں کے تکملے ہم فوراً لکھ سکتے ہیں۔ پس ہماری کوشش ہوتی ہے کہ دیے ہوئے جملوں کو اس قسم کے کسی جملہ میں تبدیل کریں۔ پھر اس کی دو صورتیں

پیدا ہوتی ہیں ایک وہ جس میں ا مثبت ہو اور دوسری وہ صورت جس میں ا منفی ہو۔ ہم عددی مثالوں کے ذریعہ ان دونوں صورتوں میں طرزِ عمل کو واضح کرینگے۔

صورت اول۔ $\frac{۱}{\sqrt{\text{۹لا}^{۲} - \text{۶لا} + ۳۷}}$

اب جملہ $\text{۹لا}^{۲} - \text{۶لا} + ۳۷$ کو ہم اس طرح بدل سکتے ہیں کہ

$$\text{۹لا}^{۲} - \text{۶لا} + ۳۷ = ۹(\text{لا}^{۲} - \tfrac{۲}{۳}\text{لا} + \tfrac{۳۷}{۹}) = ۹\left\{(\text{لا}^{۲} - \tfrac{۲}{۳}\text{لا}) + \tfrac{۳۷}{۹}\right\}$$

ہم چاہتے ہیں کہ چھوٹی قوسوں کے اندرونی جملہ کو کامل مربع بنائیں، پس

$$\text{۹لا}^{۲} - \text{۶لا} + ۳۷ = ۹\left\{(\text{لا}^{۲} - \tfrac{۲}{۳}\text{لا} + \tfrac{۱}{۹}) - \tfrac{۱}{۹} + \tfrac{۳۷}{۹}\right\}$$

$$= ۹\left\{(\text{لا} - \tfrac{۱}{۳})^{۲} + ۴\right\}$$

پھر اگر ہم رکھیں $\text{لا} - \frac{۱}{۳} = \text{ما}$ یعنے $\text{لا} = \text{ما} + \frac{۱}{۳}$

تو $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = ۱$ اور $\text{فرلا} = \text{فرما}$

اس لیے

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{۹لا}^{۲} - \text{۶لا} + ۳۷}} = \frac{۱}{۳}\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{(\text{لا} - \frac{۱}{۳})^{۲} + ۴}}$$

$$= \frac{۱}{۳}\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{ما}^{۲} + ۲^{۲}}}$$

$$= \frac{۱}{۳}\left\{\text{لوک}\left(\text{ما} + \sqrt{\text{ما}^{۲} + ۴}\right)\right\} + \text{ک}$$

$$= \frac{۱}{۳}\,\text{لوک}\left\{(\text{لا} - \tfrac{۱}{۳}) + \sqrt{(\text{لا} - \tfrac{۱}{۳})^{۲} + ۴}\right\} + \text{ک}$$

صورت دوم۔ $\frac{۱}{\sqrt{۲۲۱ - \text{۲۰لا} - \text{۲۵لا}^{۲}}}$

جملہ ۲۲۱ - ۲۰ لا - ۲۵ لا² کو معیاری شکل میں لانے کے لیے اس طرح تبدیل کر سکتے ہیں کہ

$$\text{۲۲۱} - \text{۲۰}\,\text{لا} - \text{۲۵}\,\text{لا}^2 = \text{۲۵}\left(\frac{\text{۲۲۱}}{\text{۲۵}} - \frac{\text{۴}}{\text{۵}}\text{لا} - \text{لا}^2\right) = \text{۲۵}\left\{\frac{\text{۲۲۱}}{\text{۲۵}} - \left(\text{لا}^2 + \frac{\text{۴}}{\text{۵}}\text{لا}\right)\right\}$$

اب ہم چاہتے ہیں کہ چھوٹی توسوں کے اندرونی جملہ کو کامل مربع بنائیں اس لیے

$$\text{۲۲۱} - \text{۲۰}\,\text{لا} - \text{۲۵}\,\text{لا}^2 = \text{۲۵}\left\{\frac{\text{۲۲۱}}{\text{۲۵}} - \left(\text{لا}^2 + \frac{\text{۴}}{\text{۵}}\text{لا} + \frac{\text{۴}}{\text{۲۵}}\right) + \frac{\text{۴}}{\text{۲۵}}\right\}$$

$$= \text{۲۵}\left\{\frac{\text{۲۲۵}}{\text{۲۵}} - \left(\text{لا} + \frac{\text{۲}}{\text{۵}}\right)^2\right\} = \text{۲۵}\left\{\text{۹} - \left(\text{لا} + \frac{\text{۲}}{\text{۵}}\right)^2\right\}$$

اب رکھو $\text{لا} + \frac{\text{۲}}{\text{۵}} = \text{ما}$ یعنے $\text{لا} = \text{ما} - \frac{\text{۲}}{\text{۵}}$ تو $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = \text{۱}$، $\text{فرلا} = \text{فرما}$

پس

$$\int \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۲۲۱} - \text{۲۰}\,\text{لا} - \text{۲۵}\,\text{لا}^2}}\,\text{فرلا} = \frac{\text{۱}}{\text{۵}}\int \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۹} - \left(\text{لا} + \frac{\text{۲}}{\text{۵}}\right)^2}}\,\text{فرلا}$$

$$= \frac{\text{۱}}{\text{۵}}\int \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۹} - \text{ما}^2}}\,\text{فرما}$$

$$= \frac{\text{۱}}{\text{۵}}\,\text{جب}^{-1}\frac{\text{ما}}{\text{۳}} + \text{ک} = \frac{\text{۱}}{\text{۵}}\,\text{جب}^{-1}\frac{\text{لا} + \frac{\text{۲}}{\text{۵}}}{\text{۳}} + \text{ک}$$

غرض ہم دیکھتے ہیں کہ اگر متکمل کوئی دوسرے درجہ کا جملہ یا اس کی قوت $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ یا اس کی قوت $-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ یا اس کی قوت $-\text{۱}$ ہو یعنے اگر $\text{سا} = \text{ا}\,\text{لا}^2 + \text{ب}\,\text{لا} + \text{ج}$ تو سا، $\frac{\text{۱}}{\text{سا}}$، $\sqrt{\text{سا}}$، $\frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{سا}}}$ کو ہمیشہ تکمل کیا جا سکتا ہے۔

مثال ۷۔ بعض اوقات ایک سے زیادہ مرتبہ متغیر کو بدلنا پڑتا ہے۔

اس کی مثال کے طور پر فرض کرو کہ ہم جملہ $\frac{\text{لا}}{\text{لا}^4 + \text{۲}\,\text{لا}^2 + \text{۲}}$ کو تکمل کرنا چاہتے ہیں۔

اس جملہ میں ہم دیکھتے ہیں کہ شمار کنندہ، نسب نما کا کامل تفرقی سر نہیں ہے۔ لیکن نسب نما میں صرف لا کی جفت قوتیں داخل ہیں کوئی طاق قوت نہیں ہے اس لیے متغیر کو بدل کر $\text{لا}^2 = \text{ما}$ رکھتے ہیں جس سے ملتا ہے

$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۲\text{لا}$، $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = \frac{۱}{۲\text{لا}}$، ۲ لا فرلا = فرما یعنے لا فرلا = $\frac{۱}{۲}$ فرما

پس $\int \frac{\text{لا فرلا}}{\text{لا}^۴ + ۲\text{لا}^۲ + ۲} = \frac{۱}{۲} \int \frac{\text{فرما}}{\text{ما}^۲ + ۲\text{ما} + ۲}$

اب بھی بائیں جانب کا تکملہ معیاری شکل کا نہیں ہے لیکن مثال ۵ میں بتلائی ہوئی شکل کا ہے اس لیے اس کو حل کرنے کے لیے وہی طریقہ اختیار کیا جا سکتا ہے جو مثال ۵ میں لیا گیا تھا۔

جملۂ $\text{ما}^۲ + ۲\text{ما} + ۲ = (\text{ما} + ۱)^۲ + ۱$

پس اگر ہم رکھیں ی = ما + ۱، $\frac{\text{فری}}{\text{فرما}} = ۱$، فرما = فری

اس لیے دیا ہوا تکملہ

$$= \frac{۱}{۲} \int \frac{\text{فرما}}{\text{ما}^۲ + ۲\text{ما} + ۱ + ۱} = \frac{۱}{۲} \int \frac{\text{فری}}{\text{ی}^۲ + ۱}$$

$$= \frac{۱}{۲} \text{مس}^{-۱}\text{ی} + \text{ک}$$

$$= \frac{۱}{۲} \text{مس}^{-۱}(\text{ما} + ۱) + \text{ک}$$

$$= \frac{۱}{۲} \text{مس}^{-۱}(\text{لا}^۲ + ۱) + \text{ک}$$

مثال ۸۔ $\frac{۳\text{لا} - ۲}{۴\text{لا}^۲ - ۴\text{لا} + ۵}$ کو تکمل کرو۔

نسب نما میں کے جملہ ۴ لا$^۲$ ـ ۴ لا + ۵ کا تفرقی سر ۸ لا ـ ۴ ہوتا ہے،

شمار کنندہ میں جملہ ۳ لا ـ ۲ ہے۔ ہم چاہتے ہیں کہ اس میں لا کا سر ۸ بنائیں لیکن اس طرح کہ جملہ میں کوئی فرق بھی نہ آئے تو ظاہر ہے کہ ہمیں اس کو $\frac{۸}{۳}$ سے ضرب اور تقسیم کرنا چاہیے اس طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{۳لا} - \text{۲}}{\sqrt{\text{۴لا}^{\text{۲}} - \text{۴لا} + \text{۵}}} = \frac{\text{۳}}{\text{۸}} \frac{\frac{\text{۸}}{\text{۳}}(\text{۳لا} - \text{۲})}{\sqrt{\text{۴لا}^{\text{۲}} - \text{۴لا} + \text{۵}}} = \frac{\text{۳}}{\text{۸}} \frac{\text{۸لا} - \frac{\text{۱۶}}{\text{۳}}}{\sqrt{\text{۴لا}^{\text{۲}} - \text{۴لا} + \text{۵}}}$$

$$= \frac{\text{۳}}{\text{۸}} \frac{(\text{۸لا} - \text{۴}) + (\text{۴} - \frac{\text{۱۶}}{\text{۳}})}{\sqrt{\text{۴لا}^{\text{۲}} - \text{۴لا} + \text{۵}}}$$

$$= \frac{\text{۳}}{\text{۸}} \frac{\text{۸لا} - \text{۴}}{\sqrt{\text{۴لا}^{\text{۲}} - \text{۴لا} + \text{۵}}} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۴لا}^{\text{۲}} - \text{۴لا} + \text{۵}}} \quad (\text{۱})$$

اب بائیں طرف کے پہلے جملہ کو ہم فوراً تکمل کر سکتے ہیں کیونکہ اگر $\text{ف}(\text{لا}) = \text{۴لا}^{\text{۲}} - \text{۴لا} + \text{۵}$ رکھیں تو یہ جملہ $\frac{\text{۳}}{\text{۸}} \{\text{ف}(\text{لا})\}^{-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}} \text{فَ}(\text{لا})$ ہے جو مثال (۴) میں بتلائے ہوئے طریقہ سے حل ہو سکتا ہے۔ پس

$$\frac{\text{۳}}{\text{۸}} \int \frac{\text{۸لا} - \text{۴}}{\sqrt{\text{۴لا}^{\text{۲}} - \text{۴لا} + \text{۵}}} \text{فرلا} = \frac{\text{۳}}{\text{۸}} \frac{(\text{۴لا}^{\text{۲}} - \text{۴لا} + \text{۵})^{-\frac{\text{۱}}{\text{۲}} + \text{۱}}}{-\frac{\text{۱}}{\text{۲}} + \text{۱}}$$

$$= \frac{\text{۳}}{\text{۴}} \sqrt{\text{۴لا}^{\text{۲}} - \text{۴لا} + \text{۵}} \quad (\text{۲})$$

مساوات (۱) میں بائیں طرف کے دوسرے جملہ کو تکمل کرنے کے لیے جملہ $\text{۴لا}^{\text{۲}} - \text{۴لا} + \text{۵}$ کو تبدیل کرنا چاہیے اس لیے

$$\text{۴لا}^{\text{۲}} - \text{۴لا} + \text{۵} = \text{۴}(\text{لا}^{\text{۲}} - \text{لا} + \frac{\text{۵}}{\text{۴}}) = \text{۴}\left\{(\text{لا}^{\text{۲}} - \text{لا}) + \frac{\text{۵}}{\text{۴}}\right\}$$

$$= \text{۴}\left\{(\text{لا}^{\text{۲}} - \text{لا} + \frac{\text{۱}}{\text{۴}}) + \text{۱}\right\} = \text{۴}\left\{(\text{لا} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}})^{\text{۲}} + \text{۱}\right\}$$

پس اگر رکھا جائے $\text{ما} = \text{لا} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}}$، $\text{فرما} = \text{فرلا}$ تو حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{۱}}{\text{۲}} \int \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۴لا}^{\text{۲}} - \text{۴لا} + \text{۵}}} \text{فرلا} = -\frac{\text{۱}}{\text{۲}} \times \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \int \frac{\text{فرما}}{\sqrt{\text{ما}^{\text{۲}} + \text{۱}}} = -\frac{\text{۱}}{\text{۴}} \text{لوک}\left(\text{ما} + \sqrt{\text{ما}^{\text{۲}} + \text{۱}}\right)$$

$$= -\frac{\text{۱}}{\text{۴}} \text{لوک}\left\{\text{لا} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}} + \sqrt{(\text{لا} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}})^{\text{۲}} + \text{۱}}\right\} \quad (\text{۳})$$

بالآخر (۲) اور (۳) کو (۱) میں رکھنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\int \frac{\text{۳لا} - \text{۲}}{\sqrt{\text{۴لا}^{\text{۲}} - \text{۴لا} + \text{۵}}} \text{فرلا} = \frac{\text{۳}}{\text{۴}} \sqrt{\text{۴لا}^{\text{۲}} - \text{۴لا} + \text{۵}} - \frac{\text{۱}}{\text{۴}} \text{لوک}\left\{\text{لا} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}} + \sqrt{(\text{لا} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}})^{\text{۲}} + \text{۱}}\right\} + \text{ک}$$

مثال ۹ ۔ جم ن طہ کو تکمل کرو جہاں ن کوئی ثبت منفی صحیح یا کسری عدد ہے ۔ اس کو معیاری شکل میں لانے کے لیے ظاہر ہے کہ حسب ذیل ابدال کرنا چاہیے :

$$عہ = ن\ طہ ،\ طہ = \frac{۱}{ن} عہ ،\ \frac{فرطہ}{فرعہ} = \frac{۱}{ن} ،\ فرطہ = \frac{۱}{ن} فرعہ$$

پس $$\int جم\ ن\ طہ\ فرطہ = \frac{۱}{ن} \int جم\ عہ\ فرعہ = \frac{جب\ عہ}{ن} + ک$$

$$= \frac{جب\ ن\ طہ}{ن} + ک$$

جب ن طہ ، مس ن طہ ، وغیرہ ، دوسری مثلثی نسبتوں کو بھی اسی طرح تکمل کیا جاسکتا ہے ۔

مثال ۱۰ ۔ جب$^۲$ طہ کو تکمل کرو ۔

اب تک ہم کو مثلثی تفاعلوں کی قوتوں کو تکمل کرنے کا قاعدہ معلوم نہیں ۔ لیکن گذشتہ مثال میں ہم نے دیکھا ہے کہ ضعفی زاویوں کے مثلثی تفاعلوں کو کس طرح تکمل کیا جاسکتا ہے ۔ پس ہماری یہ کوشش ہوتی ہے کہ کسی مثلثی تفاعل کی قوت کو ضعفی زاویہ کے تفاعل کے طور پر بیان کیا جائے ۔ ہمیں معلوم ہے کہ

$$۱ - جم\ ۲\ طہ = ۲\ جب^۲\ طہ \quad پس\ جب^۲\ طہ = \frac{۱}{۲}(۱ - جم\ ۲\ طہ)$$

اس لیے $$\int جب^۲\ طہ\ فرطہ = \frac{۱}{۲}\int (۱ - جم\ ۲\ طہ)\ فرطہ$$

یعنی

$$\int جب^۲\ طہ\ فرطہ = \frac{۱}{۲}\int فرطہ - \frac{۱}{۲}\int جم\ ۲\ طہ\ فرطہ$$

$= \frac{۱}{۲} طہ - \frac{۱}{۲} . \frac{جب\ ۲\ طہ}{۲} + ک$ (گذشتہ مثال میں ن = ۲ رکھنے سے) اسی طرح اگر جب$^۴$ طہ کو تکمل کرنا ہو تو اس کو جب ۲ طہ اور جب ۴ طہ کی رقوم میں بیان کرسکتے ہیں ۔

$$جب^۴\ طہ = (جب^۲\ طہ)^۲ = \left(\frac{۱ - جم\ ۲\ طہ}{۲}\right)^۲ = \frac{۱}{۴}\ (۱ - ۲\ جم\ ۲\ طہ + جم^۲\ ۲\ طہ)$$

لیکن

$$1 + \text{جم}\,4\,\text{طہ} = 2\,\text{جم}^2\,2\,\text{طہ}$$

پس

$$\text{جب}^4\,\text{طہ} = \frac{1}{4}\left\{1 - 2\,\text{جم}\,2\,\text{طہ} + \frac{1 + \text{جم}\,4\,\text{طہ}}{2}\right\}$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\,\text{جم}\,2\,\text{طہ} + \frac{1}{8}\,\text{جم}\,4\,\text{طہ}$$

اس لیے

$$\int \text{جب}^4\,\text{طہ}\;\text{فرطہ} = \int\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\,\text{جم}\,2\,\text{طہ} + \frac{1}{8}\,\text{جم}\,4\,\text{طہ}\right)\text{فرطہ}$$

$$= \frac{3}{8}\,\text{طہ} - \frac{1}{2}\,\frac{\text{جب}\,2\,\text{طہ}}{2} + \frac{1}{8}\,\frac{\text{جب}\,4\,\text{طہ}}{4} + \text{ک}$$

اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ جب طہ یا جم طہ کی جفت قوتوں کو تکمل کیا جا سکتا ہے اگرچہ بڑی قوتوں کے لیے یہ عمل بہت طویل ہو جاتا ہے۔

مثال ۱۱ - اس مثال میں ہم جب طہ اور جم طہ کی طاق قوتوں کو تکمل کرنے کا قاعدہ بتلائینگے۔ فرض کرو کہ ہم جم⁵ طہ کو تکمل کرنا چاہتے ہیں۔ اس کو یوں لکھ سکتے ہیں:

$$\text{جم}^5\,\text{طہ} = \text{جم}^4\,\text{طہ}\;\text{جم}\,\text{طہ} = (\text{جم}^2\,\text{طہ})^2\;\text{جم}\,\text{طہ}$$

$$= (1 - \text{جب}^2\,\text{طہ})^2\;\text{جم}\,\text{طہ} = (1 - 2\,\text{جب}^2\,\text{طہ} + \text{جب}^4\,\text{طہ})\;\text{جم}\,\text{طہ}$$

پس

$$\int \text{جم}^5\,\text{طہ}\;\text{فرطہ} = \int \text{جم}\,\text{طہ}\;\text{فرطہ} - 2\int \text{جب}^2\,\text{طہ}\;\text{جم}\,\text{طہ}\;\text{فرطہ} + \int \text{جب}^4\,\text{طہ}\;\text{جم}\,\text{طہ}\;\text{فرطہ}$$

بائیں طرف کے جملہ کو تکمل کرنے کے لیے ذیل کی تبدیلی کرو:

$$\text{لا} = \text{جب}\,\text{طہ}،\quad \frac{\text{فرلا}}{\text{فرطہ}} = \text{جم}\,\text{طہ}،\quad \text{فرلا} = \text{جم}\,\text{طہ}\;\text{فرطہ}$$

پس

$$\int \text{جم}^5\,\text{طہ}\;\text{فرطہ} = \int \text{فرلا} - 2\int \text{لا}^2\;\text{فرلا} + \int \text{لا}^4\;\text{فرلا}$$

$$= \text{لا} - 2\,\frac{\text{لا}^3}{3} + \frac{\text{لا}^5}{5} + \text{ک}$$

$$= \text{جب}\,\text{طہ} - \frac{2}{3}\,\text{جب}^3\,\text{طہ} + \frac{1}{5}\,\text{جب}^5\,\text{طہ} + \text{ک}$$

مذکورۂ بالا مثالوں سے متغیر کو تبدیل کرنے کا قاعدہ بخوبی ذہن نشین ہو گیا ہوگا۔ اب ہم اس کا ایک ثبوت دینگے جو اگرچہ بالکل باضابطہ نہیں ہے لیکن موجودہ منزل پر طالب علم کی ضرورت کے لیے کافی ہے

فرض کرو کہ ہم تفاعل و = ف (لا) کو تکمل کرنا چاہتے ہیں اور اس کو معیاری شکل میں لانے کے لیے لا کی بجائے ایک نیا متغیر ء حسب ذیل رشتہ کی مدد سے داخل کرتے ہیں :۔

فرض کرو کہ

لا = فہ (ء) ، فرلا / فرء = فہَ (ء)

ی = ∫ ف (لا) فرلا یعنے فری / فرلا = ف (لا) = و

تو چونکہ ی، لا کا ایک تفاعل ہے اور اوپر کے تغیر کے باعث لا، ء کا ایک تفاعل ہے اس لیے ی بھی ء کا تفاعل ہوگا اور اس لیے تفاعل کے تفاعل کو تفرق کرنے کے قاعدہ سے حاصل ہوتا ہے کہ

فری / فرء = فری / فرلا . فرلا / فرء = و فرلا / فرء

جس میں و اور فرلا / فرء دونوں کو نئے متغیر ء کی رقوم میں بیان کرنا چاہیے۔

پس

ی = ∫ و فرلا / فرء فرء

یعنے

∫ ف (لا) فرلا = ∫ ف {فہ (ء)} فہَ (ء) فرء

جو متغیر کی تبدیلی کا مطلوبہ قاعدہ ہے جس کو ہم نے گذشتہ مثالوں میں استعمال کیا ہے۔ طالب علم کو چاہیے کہ ایک غیر معیّن تکملہ میں آخری جواب ہمیشہ ابتدائی متغیر یعنے لا کی رقوم میں بیان کرے اگرچہ اصلی عمل تکمل متغیر ء کی مدد سے کیا گیا ہو۔

## مشقی سوالات ۲۳

ذیل کے تفاعلوں کو تکمل کرو :۔

(۱) $\frac{\text{لا}^{۳}}{۲\text{لا} - ۱}$ (۲) $\frac{۱}{۲ - \text{لا} - \text{لا}^{۲}}$

(۳) $\frac{۱ - \text{لا}}{۱ - \text{لا} + \text{لا}^{۲}}$ (۴) $\frac{۱}{\text{لا} + \text{لا}^{۲}}$

(۵) $\frac{۱}{\sqrt{\text{لا} - \text{لا}^{۲}}}$ (۶) $\frac{۲\text{لا} + ۱}{\sqrt{\text{لا}^{۲} - ۱}}$

(۷) $\frac{\text{لا}^{۲}}{\sqrt{\text{لا}^{۶} - ۶\text{لا}^{۳} + ۵}}$ (۸) $\frac{۳\text{لا} + ۲}{\sqrt{۱۹ - ۵\text{لا} + \text{لا}^{۲}}}$

(۹) $\frac{۸\text{لا} - ۳}{\sqrt{۱۲\text{لا} - ۴\text{لا}^{۲} - ۵}}$ (۱۰) $\frac{۱ - \text{لا}}{۴\text{لا}^{۲} - ۴\text{لا} - ۳}$

(۱۱) $\frac{۱}{\sqrt{۴ + ۳\text{لا} - ۲\text{لا}^{۲}}}$ (۱۲) $\frac{۶\text{لا} + ۱}{\sqrt{۳\text{لا} + ۹\text{لا}^{۲}}}$

(۱۳) $(۶ + \text{لا} - \text{لا}^{۲})^{۵}(۱ - ۲\text{لا})$ (۱۴) $(۱ - \text{لا})^{۲}(\text{لا}^{۳} - ۳\text{لا}^{۲} + ۳\text{لا} - ۱۰)^{۲}$

(۱۵) $\frac{\text{لوک لا}}{\text{لا}}$ (۱۶) $\frac{\text{مس}^{-۱}\,\text{لا}}{۱ + \text{لا}^{۲}}$

(۱۷) $\text{جب}^{۲}\,۳\text{طہ}$ (۱۸) $\text{جب}^{۶}\,\text{طہ}$

(۱۹) $\text{جم}^{۴}\,\text{طہ}$ (۲۰) $\text{جب}^{۷}\,\text{طہ}$

(۲۱) $\text{جم}^{۵}\,\text{طہ}$

## ۴۔۵ - تکمل بالحصص :-

اکثر تفاعل جن کو تکمل کرنے کی ہمیں ضرورت ہوتی ہے بظاہر نہ تو معیاری شکل کے ہوتے ہیں نہ انہیں کسی آسان استحالہ (تبدیلی) کی مدد سے معیاری شکل میں لایا جا سکتا ہے ۔ ایسے تفاعل اگر دو سادہ قسم کے تفاعلوں کا حاصل ضرب ہوں تو اِن کو ذیل کے قاعدہ کی مدد سے معیاری

شکل میں لا کر تکمل کیا جا سکتا ہے۔
فرض کرو کہ ی اور و متغیر لا کے دو تفاعل ہیں۔ تو دو تفاعلوں کے حاصل ضرب کو تفرق کرنے کے قاعدہ سے ہمیں معلوم ہے کہ

$$\frac{ف}{فلا}(ی\,و) = ی\,\frac{فو}{فلا} + و\,\frac{فی}{فلا}$$

اس مساوات کے دونوں طرف تکمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$ی\,و = \int ی\,\frac{فو}{فلا}\,فلا + \int و\,\frac{فی}{فلا}\,فلا$$

اس لیے

$$\int ی\,\frac{فو}{فلا}\,فلا = ی\,و - \int و\,\frac{فی}{فلا}\,فلا \qquad (۱)$$

اب فرض کرو کہ ی = ف$_۱$ (لا)، $\frac{فو}{فلا}$ = ف$_۲$ (لا)
تو و = $\int$ ف$_۲$ (لا) فلا، $\frac{فی}{فلا}$ = فَ$_۱$ (لا) ان قیمتوں کو مساوات (۱) میں رکھنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\int ف_۱(لا)\,ف_۲(لا)\,فلا = ف_۱(لا)\left\{\int ف_۲(لا)\,فلا\right\}$$

$$- \int فَ_۱(لا)\left\{\int ف_۲(لا)\,فلا\right\} فلا \;\ldots\ldots\ldots\ (۲)$$

اکثر دو تفاعلوں کے حاصل ضرب میں ایک تفاعل ایسا ہوتا ہے کہ اس کا تکملہ معیاری شکلوں سے ہمیں معلوم ہے۔ نیز ایک تفاعل کا تفرقی سر اور دوسرے تفاعل کا تکملہ ضرب کھا کر اکثر معیاری شکل میں آ جاتے ہیں۔ اس طرح ہمیں دونوں کے حاصل ضرب کا تکملہ آسانی سے مل جاتا ہے۔ اس عمل کو "تکمل بالحصص" کہتے ہیں۔
اس عمل میں دو امور قابل غور ہیں۔ دو تفاعل ف$_۱$ (لا) اور ف$_۲$ (لا) دیے ہوئے ہوں تو پہلے یہ دیکھنا چاہیے کہ دونوں میں سے کس تفاعل کو

ہم معیاری شکلوں سے یا کسی اور طرح بآسانی معلوم کر سکتے ہیں۔ دوسرے یہ کہ بائیں طرف کا تکملہ یعنی ∫ ف٢ (لا) {∫ ف١ (لا) فرلا} فرلا ابتدائی تکملہ ∫ ف١ (لا) ف٢ (لا) فرلا کی بہ نسبت آسان تر ہے یا نہیں۔ اگر ایسا نہ ہو تو ضابطہ (١) میں ی = ف٢ (لا)، فرو/فرلا = ف١ (لا)، و = ∫ ف١ (لا) فرلا، فری/فرلا = ف٢ (لا) رکھنا چاہیے جس سے حاصل ہوگا۔

∫ ف١ (لا) ف٢ (لا) فرلا = ف٢ (لا) {∫ ف١ (لا) فرلا}

− ∫ ف٢ (لا) {∫ ف١ (لا) فرلا} فرلا ......... (٣)

اس کا کوئی عام قاعدہ نہیں بتلایا جا سکتا کہ ف١ (لا) اور ف٢ (لا) میں سے کس تفاعل کو ی کے مساوی اور کس کو فرو/فرلا کے مساوی رکھا جائے۔ دی ہوئی مثالوں میں آزمایش سے اس کا تصفیہ ہو سکتا ہے۔

اس کے علاوہ بعض اوقات محض ایک مرتبہ تکمل بالحصص کرنے سے جواب نہیں ملتا بلکہ آخری تکملہ ∫ ف٢ (لا) {∫ ف١ (لا) فرلا} فرلا بھی ممکن ہے معیاری شکل کا نہ ہو۔ اس صورت میں آخری تکملہ کو ابتدائی تکملہ کی طرح دو تفاعلوں کا حاصل ضرب مان کر پھر دوبارہ تکمل بالحصص کرنا چاہیے اور اگر اس پر بھی عمل تکمل ختم نہ ہو تو تیسری یا چوتھی مرتبہ وغیرہ جہاں تک ضرورت ہو تکمل بالحصص کرتے جانا چاہیے یہاں تک کہ آخری تفاعل جس کو تکمل کرنا ہے معیاری شکل میں آجائے۔

ان نکات کو ہم چند مثالوں کے ذریعہ واضح کرینگے۔

مثال (١)۔ لا جب لا کو تکمل کرو۔

محض لا کو بھی ہم تکمل کر سکتے ہیں اور اگر صرف جب لا تنہا ہو تو اس کو بھی تکمل کر سکتے ہیں لیکن اب تک کوئی قاعدہ ایسا نہیں معلوم ہے جس کی بنا پر لا جب لا کو تکمل کیا جا سکے۔ اس لیے اس کو تکمل بالحصص کرنے کی کوشش کرینگے۔ اب پہلا سوال یہ ہے کہ لا اور جب لا میں سے کس کو ی اور کس کو فرو/فرلا کے مساوی رکھا جائے۔ دونوں بآسانی تکمل ہو سکتے ہیں

اس لیے کسی کو بھی $\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}}$ رکھا جا سکتا ہے لیکن اگر بالفرض لا = $\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}}$ رکھیں تو

$\text{و} = \int \text{لا فرلا} = \frac{\text{لا}^{2}}{2}$ ہوتا ہے اور اس لیے $\int \text{و} \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} \text{فرلا} = \int \frac{\text{لا}^{2}}{2} \text{جم لا فرلا}$

جو ظاہر ہے کہ ابتدائی تکملہ $\int$ لا جب لا فرلا کی بہ نسبت زیادہ پیچیدہ ہے۔
اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ی = لا اور $\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}}$ = جب لا رکھنا ضروری ہے

اب $\text{و} = \int \text{جب لا فرلا} = -\text{جم لا}$ اور $\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} = 1$

پس

$$\int \text{لا جب لا فرلا} = -\text{لا جم لا} - \int 1\,(-\text{جم لا})\,\text{فرلا} = -\text{لا جم لا} + \int \text{جم لا فرلا}$$
$$= -\text{لا جم لا} + \text{جب لا} + \text{ک}$$

مثال (۲)۔ $\text{لا}^{2}\,\text{و}^{\text{لا}}$ کو تکمل کرو:—

ایسے تفاعلوں کو تکمل کرنے کے لیے جن میں ف(لا) = $\text{لا}^{\text{ن}}$ جہاں ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے اور ف(لا) = جب لا یا جم لا یا $\text{و}^{\text{لا}}$ ہو ہمیشہ ی = $\text{لا}^{\text{ن}}$ اور $\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}}$ = جب لا یا جم لا یا $\text{و}^{\text{لا}}$ لینا چاہیے تاکہ آخری تکملے پہلے کی بہ نسبت زیادہ آسان ہوتے چلے جائیں۔ پس موجودہ مثال میں

$$\text{ی} = \text{لا}^{2}،\quad \frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} = \text{و}^{\text{لا}}،\quad \text{و} = \text{و}^{\text{لا}}،\quad \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} = 2\,\text{لا}$$

اس لیے $\int \text{لا}^{2}\text{و}^{\text{لا}}\,\text{فرلا} = \text{لا}^{2}\text{و}^{\text{لا}} - 2\int \text{لا}\,\text{و}^{\text{لا}}\,\text{فرلا}$

اسی طرح $\int \text{لا}\,\text{و}^{\text{لا}}\,\text{فرلا} = \text{لا}\,\text{و}^{\text{لا}} - \int \text{و}^{\text{لا}}\,\text{فرلا} = \text{لا}\,\text{و}^{\text{لا}} - \text{و}^{\text{لا}}$

پس $\int \text{لا}^{2}\text{و}^{\text{لا}}\,\text{فرلا} = \text{لا}^{2}\text{و}^{\text{لا}} - 2\,\text{لا}\,\text{و}^{\text{لا}} + 2\,\text{و}^{\text{لا}} + \text{ک}$

مثال (۳)۔ $\text{و}^{\text{لا}}$ جب لا کو تکمل کرو:—

اس مثال میں $\text{و}^{\text{لا}}$ اور جب لا میں سے کسی تفاعل کو ی اور دوسرے کو $\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}}$ لے سکتے ہیں۔ پس

$$\text{ی} = \text{و}^{\text{لا}}،\quad \frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} = \text{جب لا}،\quad \text{و} = -\text{جم لا}،\quad \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} = \text{و}^{\text{لا}}$$

اس لیے $\int$ وٌلا جب لا فرلا = - وٌلا جم لا + $\int$ وٌلا جم لا فرلا

نیز اسی طرح وٌلا جم لا کو تکمل بالحصص کرنے سے جبکہ ی = وٌلا اور $\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}}$ = جم لا رکھیں، حاصل ہوتا ہے کہ

$\int$ وٌلا جم لا فرلا = وٌلا جب لا - $\int$ وٌلا جب لا فرلا

پس $\int$ وٌلا جب لا فرلا = - وٌلا جم لا + وٌلا جب لا - $\int$ وٌلا جب لا فرلا

ہم دیکھتے ہیں کہ جب ہم وٌلا جب لا کو تکمل بالحصص کرتے ہیں تو بائیں طرف بھی پھر وہی ابتدائی تکملہ حاصل ہوتا ہے۔ اس کو سیدھے طرف لے جانے سے فوراً قیمت مل جاتی ہے

۲ $\int$ وٌلا جب لا فرلا = وٌلا (جب لا - جم لا)

یعنے $\int$ وٌلا جب لا فرلا = $\frac{\text{وٌلا}}{۲}$ (جب لا - جم لا) + ک

اگر اس قیمت کو ہم وٌلا جم لا کے تکملہ میں رکھیں تو حاصل ہوتا ہے

$\int$ وٌلا جم لا فرلا = وٌلا جب لا - $\frac{\text{وٌلا}}{۲}$ (جب لا - جم لا) + کَ

= $\frac{\text{وٌلا}}{۲}$ (جم لا + جب لا) + کَ

مثال (۴) لوک لا کو تکمل کرو:-

اس طرح کے تفاعلوں کو تکمل بالحصص کرنے کے لیے ہم دیکھتے ہیں کہ اگرچہ لوک لا دو تفاعلوں کا حاصل ضرب نہیں ہے لیکن ہم فرض کر سکتے ہیں کہ دوسرا تفاعل ۱ ہے یعنے دیا ہوا تفاعل در اصل ۱ × لوک لا ہے جس کے لیے ہم رکھتے ہیں

ی = لوک لا، $\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}}$ = ۱، و = لا، $\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$ = $\frac{۱}{\text{لا}}$

پس

$\int$ لوک لا فرلا = $\int$ ۱ × لوک لا فرلا = لا لوک لا − $\int$ لا × $\frac{۱}{لا}$ فرلا

= لا لوک لا − $\int$ فرلا = لا لوک لا − لا + ک

**مثال (۵)** جم$^{۳}$ لا جب$^{۲}$ لا کو تکمل کرو۔

$\int$ جم$^{۳}$ لا جب$^{۲}$ لا فرلا = $\int$ جم$^{۲}$ لا جب$^{۲}$ لا جم لا فرلا

= $\frac{۱}{۳}$ جم$^{۲}$ لا جب$^{۳}$ لا + $\frac{۲}{۳}$ $\int$ جم لا جب لا جب$^{۳}$ لا فرلا

= $\frac{۱}{۳}$ جم$^{۲}$ لا جب$^{۳}$ لا + $\frac{۲}{۳}$ $\int$ جم لا جب$^{۲}$ لا (۱ − جم$^{۲}$ لا) فرلا

پس

(۱ + $\frac{۲}{۳}$) $\int$ جم$^{۳}$ لا جب$^{۲}$ لا فرلا = $\frac{۱}{۳}$ جم$^{۲}$ لا جب$^{۳}$ لا + $\frac{۲}{۳}$ $\int$ جم لا جب$^{۲}$ لا فرلا

یعنے $\int$ جم$^{۳}$ لا جب$^{۲}$ لا فرلا = $\frac{۱}{۵}$ جم$^{۲}$ لا جب$^{۳}$ لا + $\frac{۲}{۵}$ $\int$ جم لا جب$^{۲}$ لا فرلا

= $\frac{۱}{۵}$ جم$^{۲}$ لا جب$^{۳}$ لا + $\frac{۲}{۳×۵}$ جب$^{۳}$ لا

= $\frac{۱}{۵}$ جم$^{۲}$ لا جب$^{۳}$ لا + $\frac{۲}{۳×۵}$ (۱ − جم$^{۲}$ لا) جب لا

= $\frac{۱}{۵}$ جم$^{۲}$ لا جب$^{۳}$ لا − $\frac{۲}{۳×۵}$ جم$^{۲}$ لا جب لا + $\frac{۲}{۳×۵}$ جب لا

**مثال (۶)** جم$^{۵}$ لا جب$^{۴}$ لا کو تکمل کرو۔

$\int$ جم$^{۵}$ لا جب$^{۴}$ لا فرلا = $\int$ جم$^{۴}$ لا جب$^{۴}$ لا جم لا فرلا

= جم$^{۴}$ لا $\frac{جب^{۵} لا}{۵}$ + $\frac{۴}{۵}$ $\int$ جم$^{۳}$ لا جب لا جب$^{۵}$ لا فرلا

= $\frac{۱}{۵}$ جم$^{۴}$ لا جب$^{۵}$ لا + $\frac{۴}{۵}$ $\int$ جم$^{۳}$ لا جب$^{۴}$ لا (۱ − جم$^{۲}$ لا) فرلا

پس

(۱ + $\frac{۴}{۵}$) $\int$ جم$^{۵}$ لا جب$^{۴}$ لا فرلا = $\frac{۱}{۵}$ جم$^{۴}$ لا جب$^{۵}$ لا + $\frac{۴}{۵}$ $\int$ جم$^{۳}$ لا جب$^{۴}$ لا فرلا

یعنے $\int$ جم$^{۵}$ لا جب$^{۴}$ لا فرلا = $\frac{۱}{۹}$ جم$^{۴}$ لا جب$^{۵}$ لا + $\frac{۴}{۹}$ $\int$ جم$^{۳}$ لا جب$^{۴}$ لا فرلا (۱)

جس سے معلوم ہوتا ہے کہ جم^۵ لا جب^۴ لا کا تکملہ معلوم کرنے کے لیے جم^۳ لا جب^۴ لا کا تکملہ معلوم کرنا کافی ہے یعنی جم لا کی قوت بقدر ۲ کے کم ہو جاتی ہے۔

لیکن ∫ جم^۳ لا جب^۴ لا فرلا = ∫ جب^۴ لا جم^۲ لا جب لا فرلا

= − ۱/۴ جب^۳ لا جم^۴ لا + ۳/۴ ∫ جب^۲ لا جم لا جم^۴ لا فرلا

= − ۱/۴ جب^۳ لا جم^۴ لا + ۳/۴ ∫ جب^۲ لا جم^۳ لا (۱ − جب^۲ لا) فرلا

پس (۱ + ۳/۴) ∫ جم^۳ لا جب^۴ لا فرلا = − ۱/۴ جم^۴ لا جب^۳ لا + ۳/۴ ∫ جم^۳ لا جب^۲ لا فرلا

یعنی ∫ جم^۳ لا جب^۴ لا فرلا = − ۱/۷ جم^۴ لا جب^۳ لا + ۳/۷ ∫ جم^۳ لا جب^۲ لا فرلا (۲)

جس سے معلوم ہوتا ہے کہ جم^۳ لا جب^۴ لا کا تکملہ معلوم کرنے کے لیے جم^۳ لا جب^۲ لا کا تکملہ معلوم کرنا کافی ہے یعنی جب لا کی قوت بقدر ۲ کے کم ہو جاتی ہے۔ (۱) میں (۲) سے قیمت درج کرنے پر حاصل ہوتا ہے کہ

∫ جم^۵ لا جب^۴ لا فرلا = ۱/۹ جم^۴ لا جب^۵ لا − ۴/(۷×۹) جم^۴ لا جب^۳ لا + (۳×۴)/(۷×۹) ∫ جم^۳ لا جب^۲ لا فرلا (۳)

اس آخری مساوات سے ظاہر ہے کہ جم^۵ لا جب^۴ لا کا تکملہ معلوم کرنے کے لیے جم^۳ لا جب^۲ لا کا تکملہ معلوم کرنا کافی ہے یعنی جم لا اور جب لا دونوں کی قوتیں بقدر ۲ کے کم ہو جاتی ہیں۔

لیکن مثال ۵ کی بناء پر چونکہ ہمیں ∫ جم^۳ لا جب^۲ لا فرلا کی قیمت معلوم ہے اس لیے جم^۵ لا جب^۴ لا کا تکملہ بالکلیہ معلوم ہو جاتا ہے۔

**مثال (۷)** جم^ن لا جب^م لا کو تکمل کرو جہاں ن اور م کوئی مثبت صحیح عدد ہیں۔

اس تفاعل کو بھی ہم ایک تحویلی ضابطہ کی مدد سے تکمل کر سکتے ہیں یعنے ہماری کوشش ہوتی ہے کہ م اور ن کو بتدریج بقدر ۲ کے کم کرتے جائیں۔ چونکہ

$$\text{جم}^{\text{ن}}\text{لا}\ \text{جب}^{\text{م}}\text{لا} = \text{جم}^{\text{ن}-۱}\text{لا}\ (\text{جب}^{\text{م}}\text{لا}\ \text{جم لا})$$

اس لیے تکمل بالحصص کے ضابطہ کو استعمال کرنے کی غرض سے ہم رکھتے ہیں

$$\text{ی} = \text{جم}^{\text{ن}-۱}\text{لا}،\quad \frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}} = \text{جب}^{\text{م}}\text{لا}\ \text{جم لا}،\quad \text{و} = \frac{\text{جب}^{\text{م}+۱}\text{لا}}{\text{م}+۱}$$

پس

$$\text{ع}_{\text{ن،م}} = \int \text{جم}^{\text{ن}}\text{لا}\ \text{جب}^{\text{م}}\text{لا}\ \text{فرلا}$$

$$= \int \text{جم}^{\text{ن}-۱}\text{لا}\ (\text{جب}^{\text{م}}\text{لا}\ \text{جم لا})\ \text{فرلا}$$

$$= \frac{\text{جم}^{\text{ن}-۱}\text{لا}\ \text{جب}^{\text{م}+۱}\text{لا}}{\text{م}+۱} + \frac{\text{ن}-۱}{\text{م}+۱}\int \text{جم}^{\text{ن}-۲}\text{لا}\ \text{جب}^{\text{م}+۱}\text{لا}\ \text{جب لا}\ \text{فرلا}$$

$$= \frac{\text{جم}^{\text{ن}-۱}\text{لا}\ \text{جب}^{\text{م}+۱}\text{لا}}{\text{م}+۱} + \frac{\text{ن}-۱}{\text{م}+۱}\int \text{جم}^{\text{ن}-۲}\text{لا}\ \text{جب}^{\text{م}}\text{لا}\ (۱-\text{جم}^{۲}\text{لا})\ \text{فرلا}$$

$$= \frac{\text{جم}^{\text{ن}-۱}\text{لا}\ \text{جب}^{\text{م}+۱}\text{لا}}{\text{م}+۱} + \frac{\text{ن}-۱}{\text{م}+۱}\,\text{ع}_{\text{ن}-۲\text{،م}} - \frac{\text{ن}-۱}{\text{م}+۱}\,\text{ع}_{\text{ن،م}}$$

یعنی

$$\text{ع}_{\text{ن،م}}\left\{۱ + \frac{\text{ن}-۱}{\text{م}+۱}\right\} = \frac{\text{جم}^{\text{ن}-۱}\text{لا}\ \text{جب}^{\text{م}+۱}\text{لا}}{\text{م}+۱} + \frac{\text{ن}-۱}{\text{م}+۱}\,\text{ع}_{\text{ن}-۲\text{،م}}$$

پس

$$\text{ع}_{\text{ن،م}} = \frac{۱}{\text{ن}+\text{م}}\,\text{جم}^{\text{ن}-۱}\text{لا}\ \text{جب}^{\text{م}+۱}\text{لا} + \frac{\text{ن}-۱}{\text{ن}+\text{م}}\,\text{ع}_{\text{ن}-۲\text{،م}} \qquad (۱)$$

تحویلی ضابطہ (۱) میں ہم دیکھتے ہیں کہ جم لا کی قوت ن بقدر ۲ کے کم ہوگئی ہے لیکن جب لا کی قوت م وہی ہے جو پہلے تھی - لیکن ہم اس کو بھی کم کرسکتے ہیں:

$$\text{ع}_{\text{ن}-۲\text{،م}} = \int \text{جم}^{\text{ن}-۲}\text{لا}\ \text{جب}^{\text{م}}\text{لا}\ \text{فرلا} = \int (\text{جم}^{\text{ن}-۲}\text{لا}\ \text{جب لا}).\text{جب}^{\text{م}-۱}\text{لا}\ \text{فرلا}$$

$$= -\frac{\text{جم}^{\text{ن}-۱}\text{لا}\ \text{جب}^{\text{م}-۱}\text{لا}}{\text{ن}-۱} + \frac{\text{م}-۱}{\text{ن}-۱}\int \text{جم}^{\text{ن}-۱}\text{لا}\ \text{جب}^{\text{م}-۲}\text{لا}\ \text{فرلا}$$

$$= -\frac{۱}{\text{ن}-۱}\,\text{جم}^{\text{ن}-۱}\text{لا}\;\text{جب}^{\text{م}-۱}\text{لا} + \frac{\text{م}-۱}{\text{ن}-۱}\int \text{جم}^{\text{ن}-۲}\text{لا}\;\text{جب}^{\text{م}-۲}\text{لا}\,(۱-\text{جب}^{۲}\text{لا})\,\text{فرلا}$$

$$= -\frac{۱}{\text{ن}-۱}\,\text{جم}^{\text{ن}-۱}\text{لا}\;\text{جب}^{\text{م}-۱}\text{لا} + \frac{\text{م}-۱}{\text{ن}-۱}\,\text{ع}_{\text{ن}-۲،\text{م}-۲} - \frac{\text{م}-۱}{\text{ن}-۱}\,\text{ع}_{\text{ن}-۲،\text{م}}$$

پس

$$\text{ع}_{\text{ن}-۲،\text{م}} = -\frac{\text{جم}^{\text{ن}-۱}\text{لا}\;\text{جب}^{\text{م}-۱}\text{لا}}{\text{ن}+\text{م}-۲} + \frac{\text{م}-۱}{\text{ن}+\text{م}-۲}\,\text{ع}_{\text{ن}-۲،\text{م}-۲} \qquad (۲)$$

ضابطہ (۲) کو ضابطہ (۱) میں درج کرنے پر حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{ع}_{\text{ن}،\text{م}} = \frac{۱}{\text{ن}+\text{م}}\,\text{جم}^{\text{ن}-۱}\text{لا}\;\text{جب}^{\text{م}+۱}\text{لا} - \frac{۱}{\text{ن}+\text{م}}\,\frac{\text{ن}-۱}{\text{ن}+\text{م}-۲}\,\text{جم}^{\text{ن}-۱}\text{لا}\;\text{جب}^{\text{م}-۱}\text{لا}$$

$$+ \frac{(\text{ن}-۱)(\text{م}-۱)}{(\text{ن}+\text{م})(\text{ن}+\text{م}-۲)}\,\text{ع}_{\text{ن}-۲،\text{م}-۲} \qquad (۳)$$

چونکہ ضابطہ (۳) ن اور م کی ہر قیمت کے لیے صحیح ہے اس لیے ن کی بجائے ن - ۲ اور م کی بجائے م - ۲ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{ع}_{\text{ن}-۲،\text{م}-۲} = \frac{۱}{\text{ن}+\text{م}-۴}\,\text{جم}^{\text{ن}-۳}\text{لا}\;\text{جب}^{\text{م}-۱}\text{لا} - \frac{۱}{\text{ن}+\text{م}-۴}\,\frac{\text{ن}-۳}{\text{ن}+\text{م}-۶}\,\text{جم}^{\text{ن}-۳}\text{لا}\;\text{جب}^{\text{م}-۳}\text{لا}$$

$$+ \frac{(\text{ن}-۳)(\text{م}-۳)}{(\text{ن}+\text{م}-۴)(\text{ن}+\text{م}-۶)}\,\text{ع}_{\text{ن}-۴،\text{م}-۴}$$

پس

$$\text{ع}_{\text{ن}،\text{م}} = \frac{۱}{\text{ن}+\text{م}}\,\text{جم}^{\text{ن}-۱}\text{لا}\;\text{جب}^{\text{م}+۱}\text{لا} - \frac{۱}{\text{ن}+\text{م}}\,\frac{\text{ن}-۱}{\text{ن}+\text{م}-۲}\,\text{جم}^{\text{ن}-۱}\text{لا}\;\text{جب}^{\text{م}-۱}\text{لا}$$

$$+ \frac{۱}{\text{ن}+\text{م}}\,\frac{\text{ن}-۱}{\text{ن}+\text{م}-۲}\,\frac{\text{م}-۱}{\text{ن}+\text{م}-۴}\,\text{جم}^{\text{ن}-۳}\text{لا}\;\text{جب}^{\text{م}-۱}\text{لا}$$

$$- \frac{۱}{\text{ن}+\text{م}}\,\frac{\text{ن}-۱}{\text{ن}+\text{م}-۲}\,\frac{\text{م}-۱}{\text{ن}+\text{م}-۴}\,\frac{\text{ن}-۳}{\text{ن}+\text{م}-۶}\,\text{جم}^{\text{ن}-۳}\text{لا}\;\text{جب}^{\text{م}-۳}\text{لا}$$

$$+ \frac{(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۳)(\text{م}-۱)(\text{م}-۳)}{(\text{ن}+\text{م})(\text{ن}+\text{م}-۲)(\text{ن}+\text{م}-۴)(\text{ن}+\text{م}-۶)}\,\text{ع}_{\text{ن}-۴،\text{م}-۴}$$

غرض ہم دیکھتے ہیں کہ ہر تکمل بالحصص کے بعد ن اور م دونوں بقدر ۲ کے کم ہوجاتے ہیں - اب چار صورتیں پیش آتی ہیں :-

## صورت اول - ن طاق ، م طاق ، ن + م جفت .

اس صورت میں آخری تکملہ ع۱،۱ = ∫ جم لا جب لا فرلا = جب² لا / ۲ اور آخری رقم حسب ذیل ہوگی :-

آخری رقم = [(ن-۱) (ن-۳) (ن-۵)...۲×۴ (م-۱) (م-۳)...۲×۴] / [(ن+م) (ن+م-۲) (ن+م-۴)...۲×۴×۶] . جب² لا (۴)

## صورت دوم - ن طاق ، م جفت ، ن + م طاق

آخری تکملہ ع۱،۰ = ∫ جم لا فرلا = جب لا اور آخری رقم حسب ذیل ہوگی :-

آخری رقم = [(ن-۱) (ن-۳)...۲×۴ (م-۱) (م-۳)...۱×۳] / [(ن+م) (ن+م-۲) (ن+م-۴)...۱×۳×۵] جب لا (۵)

## صورت سوم - ن جفت ، م طاق ، ن + م طاق

آخری تکملہ ع۰،۱ = ∫ جب لا فرلا = ∫ جب لا فرلا = - جم لا اور آخری رقم حسب ذیل ہوگی :-

آخری رقم = - [(ن-۱) (ن-۳)...۱×۳ (م-۱) (م-۳)...۲×۴] / [(ن+م) (ن+م-۲) (ن+م-۴)...۱×۳×۵] جم لا (۶)

## صورت چہارم - ن جفت ، م جفت ، ن +م جفت

آخری تکملہ ع۰،۰ = ∫ فرلا = لا اور آخری رقم حسب ذیل ہوگی :-

آخری رقم = [(ن-۱) (ن-۳)...۱×۳ (م-۱) (م-۳)...۱×۳] / [(ن+م) (ن+م-۲) (ن+م-۴)....۲×۴×۶] لا (۷)

ن اور م کی قیمتوں کو کم کرتے وقت یہ خیال رکھنا چاہیے کہ اگر ن کی قیمت م سے پہلے ختم ہوجائے تو پھر ضابطہ (۲) کی مدد سے ن کی اس آخری قیمت

کو مستقل رکھ کر م کی قیمتوں کو کم کرنا چاہیے ۔ اس کے برخلاف اگر م کی قیمت پہلے ختم ہو جائے تو ضابطہ (۱) کی مدد سے م کی اس آخری قیمت کو مستقل رکھ کر ن کی قیمتوں کو کم کرنا چاہیے یہاں تک کہ مذکورۂ بالا چار صورتوں میں سے کوئی صورت حاصل ہو جائے ۔

اگر صرف $\int$ جم$^{ن}$ لا فرلا معلوم کرنا ہو تو اوپر کی مثال میں م = ۰ رکھو اور اگر صرف $\int$ جب$^{م}$ لا فرلا معلوم کرنا ہو تو ن = ۰ رکھو اور اس طرح عمل کرو کہ قوتیں بقدر ۲ کے کم ہوتی جائیں ۔

# مشقی سوالات ۲۴

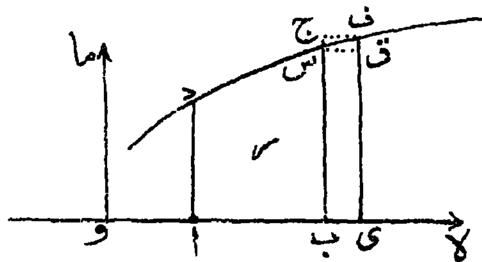
ذیل کے تفاعلوں کو تکمل کرو :-

(۱) لا جب ۲ لا
(۲) لا$^{۲}$ جم لا
(۳) لا$^{۳}$ قو$^{لا}$
(۴) لا جم$^{۲}$ لا
(۵) لا (لوک لا)$^{۲}$
(۶) قو$^{لا}$ جب ۲ لا
(۷) قو$^{۲لا}$ جم لا
(۸) قو$^{-لا}$ جم ۳ لا
(۹) قو$^{لا}$ جب لا جم لا
(۱۰) مس$^{-۱}$ لا
(۱۱) لا جب$^{-۱}$ لا
(۱۲) لا$^{۲}$ مس$^{-۱}$ لا
(۱۳) جب$^{۶}$ لا
(۱۴) جب$^{۷}$ لا
(۱۵) جم$^{۴}$ لا
(۱۶) جم$^{۵}$ لا
(۱۷) جب$^{۴}$ لا جم$^{۳}$ لا
(۱۸) جب$^{۴}$ لا جم$^{۲}$ لا
(۱۹) جب$^{۶}$ لا جم$^{۳}$ لا
(۲۰) جب$^{۶}$ لا جم$^{۴}$ لا

# ۵،۵ معین تکملہ

## ۱،۵،۵ :- تکملہ کی ہندسی تعبیر

فرض کرو کہ ایک دیئے ہوئے تفاعل ما = ف (لا) کی ترسیم د س ف منحنی میں کی گئی ہے اور وا = ا، وب = لا، ب ی = مف لا




فاصلے محور لا پر لیے گئے ہیں اور نقاط ا، ب، ی پر کے معین ا د، ب س، ی ف کھینچے گئے ہیں۔ س ج محور لا کے متوازی کھینچا گیا ہے جو ب س محدودہ کو نقطہ ج پر قطع کرتا ہے۔ اسی طرح س ق محور لا کے متوازی کھینچا گیا ہے جو ی ف (محدودہ بشرطِ ضرورت) کو ق پر قطع کرتا ہے۔ تب

س ق = ج ف = ب ی = مف لا ؛

نقطہ ا کا مقام معین ہے کیونکہ ا پر لا = ا ہے لیکن ب کو ہم جہاں چاہیں لے سکتے ہیں اور اس کے ساتھ ی کا مقام بھی بدلیگا۔

اب رقبہ ا ب س د پر غور کرو جو تین مستقیم خطوں ا ب، ا د، ب س سے اور ایک منحنی خط د س سے گھرا ہوا ہے۔ اس رقبہ کو اگر ہم ر سے تعبیر کریں تو ظاہر ہے کہ نقطہ ب یعنی لا کو بدلنے سے

یہ رقبہ بھی بدلیگا پس ر متغیر لا کا ایک تفاعل ہوگا۔
ب ی کو ہم نے ایک چھوٹا فاصلہ مف لا لیا ہے اس لیے رقبہ ب ی ف س بھی ایک چھوٹا رقبہ ہوگا جس کو مف ر سے تعبیر کرسکتے ہیں۔ اب چونکہ

وب = لا اس لیے ب س = ف (لا)، وی = لا + مف لا،

ی ف = ف (لا + مف لا)

اب شکل سے ظاہر ہے کہ

مستطیل ب ی ق س > رقبۂ ب ی ف س > مستطیل ب ی ف ج

یعنے

ب س × ب ی > مف ر > ی ف × ب ی

یعنے

ف (لا) مف لا > مف ر > ف (لا + مف لا) مف لا

اس رشتے میں اگر سب رقموں کو مف لا سے تقسیم کیا جائے تو حاصل ہوتا ہے کہ

ف (لا) > مف ر / مف لا > ف (لا + مف لا) (۱)

رشتۂ (۱) سے معلوم ہوتا ہے کہ رقبہ ر کے بدلنے کی اوسط شرح ب س اور ی ف کے درمیان کسی عدد کے مساوی ہوتی ہے، اب مف لا کی چاہے کچھ ہی قیمت لی جائے یہ رشتہ قائم رہتا ہے۔
اگر مف لا کو بہت چھوٹا کرتے جائیں تو ف (لا + مف لا) کی قیمت ف (لا) کی قیمت کے قریب آتی جاتی ہے یعنے اگر نقطہ ی کو نقطہ ب کے بہت قریب لائیں تو ی ف کی قیمت ب س کے قریب آتی ہے۔ لیکن اس صورت میں بھی مف ر / مف لا کی قیمت ی ف اور ب س کے درمیان رہتی ہے۔ پس آخر چونکہ ی ف کی انتہا ب س ہے اس لیے مف ر / مف لا کی انتہا بھی ب س ہوگی۔

لہٰذا

نہا (مف لا ← ۰) مف ر / مف لا = ب س = ف (لا)

یعنے

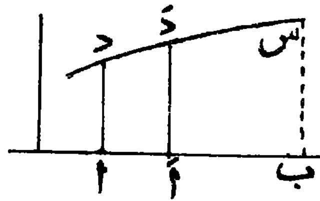
فر ر / فر لا = ف (لا) (۲)

یعنے رقبہ ر (ا ب س د) متغیر لا کا وہ تفاعل ہے جس کا تفرقی سر دیے ہوئے تفاعل ف (لا) کے مساوی ہے۔ اس لیے غیر معین تکملہ کی تعریف کی بنا پر

ر = ∫ ف (لا) فر لا + ک (۳)

جہاں ک تکمل کا اختیاری مستقل ہے۔

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ تفاعل ف (لا) کا غیر معیّن تکملہ اُس رقبہ کو تعبیر کرتا ہے جو کسی ایک نقطہ ا (لا = لَ) سے کسی متبدل نقطہ ب (لا) تک منحنی اور محور لا کے درمیان محصور ہو۔ نقطہ ا کو بدلنے کا اثر سوائے اس کے کچھ نہیں ہے کہ مستقل ک کی قیمت بدل جائے۔ مثلاً اگر ہم رقبہ کو




نقطہ اَ (لا = لَ) سے ناپیں تو

ر = رقبہ اَ ب س دَ = رقبہ ا ب س د - رقبہ ا اَ دَ د

= ∫ ف (لا) فر لا + ک - رقبہ ا اَ دَ د

= ∫ ف (لا) فر لا + کَ

جہاں کَ = ک ۔ رقبہ ا اَ دَ د بھی ایک مستقل ہے کیونکہ ا اَ دَ د مستقل رقبہ ہے

## ۵۲ ، ۵ ۔ مُعیّن تکملہ کی تعریف

فرض کرو کہ اختیاری مستقل ک کو شامل کیے بغیر تفاعل ف (لا) کا غیر معین تکملہ فا (لا) ہے

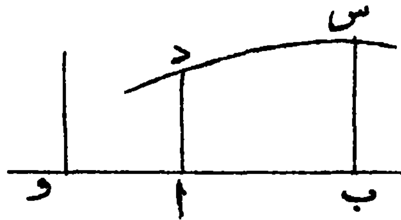
یعنے

فا (لا) = ∫ ف (لا) فرلا (۱)

اس قیمت کو گزشتہ دفعہ ۱۵، ۵ کے رشتہ (۳) میں رکھنے پر حاصل ہوتا ہے کہ

ر = فا (لا) + ک

جہاں ہم رقبہ ر کو نقطہ ا (و ا = ل) سے ناپتے ہیں ۔




مستقل ک کی قیمت معلوم کرنے کے لیے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر نقطہ ب کو نقطہ ا پر منطبق کیا جائے یعنے اگر لا = ل رکھا جائے تو بجائے رقبہ ا ب س د کے صرف ایک ہی خط ا د حاصل ہوتا ہے یعنے ر کی قیمت صفر ہو جاتی ہے ۔ پس مساوات (۲) میں لا = ل رکھنے پر ملتا ہے کہ

۰ = فا (ل) + ک یعنے ک = ـ فا (ل) (۳)

پس

$$\text{س} = \text{فا(لا)} - \text{فا(ا)} \qquad (۴)$$

ضابطہ (۴) سے ہم کو وہ قاعدہ معلوم ہوتا ہے کہ کسی ثابت نقطہ ا سے ایک متغیر نقطہ ب تک رقبہ کس طرح معلوم کیا جائے۔

اب اگر نقطہ ب کو بھی ہم ثابت کر دیں اور فاصلہ وب = ب ہو تو رقبہ ا ب س د ایک معین رقبہ ہوتا ہے جس کی قیمت مساوات (۴) میں لا = ب رکھنے سے حاصل ہوتی ہے :—

$$\text{رقبہ ا ب س د} = \text{فا(ب)} - \text{فا(ا)} \qquad (۵)$$

مساوات (۴) سے تعبیر ہونے والی قیمت کو بالعموم

$$\int_{ا}^{لا} \text{ف(لا) فرلا} = \text{فا(لا)} - \text{فا(ا)} \qquad (۶)$$

اور مساوات (۵) سے تعبیر ہونے والے جملہ کو

$$\int_{ا}^{ب} \text{ف(لا) فرلا} = \text{فا(ب)} - \text{فا(ا)} \qquad (۷)$$

لکھتے ہیں۔ جملہ (۷) میں چونکہ ا اور ب دونوں نقطے معین ہیں اس لیے $\int_{ا}^{ب}$ ف(لا) فرلا کو " ف(لا) کا معین تکملہ " کہتے ہیں جو نقطہ لا = ا سے نقطہ لا = ب تک لیا جاتا ہے۔ ا کو تکمل کی " سفلی حد " اور ب کو تکمل کی " علوی حد " کہتے ہیں اگر ب > ا یعنے اگر نقطہ ب نقطہ ا کی سیدھی جانب واقع ہو۔

جملہ (۷) سے معین تکملہ کے معلوم کرنے کا قاعدہ یہ حاصل ہوتا ہے کہ ا سے ب تک ف(لا) کا معیّن تکملہ = غیر معیّن تکملہ کی قیمت نقطہ لا = ب پر ۔ غیر معیّن تکملہ کی قیمت نقطہ لا = ا پر ۔

اس عمل کو یوں بھی لکھتے ہیں کہ اگر $\int$ ف(لا) فرلا = فا(لا) تو

$$\int_{ا}^{ب} \text{ف(لا) فرلا} = \Big[\text{فا(لا)}\Big]_{ا}^{ب} = \text{فا(ب)} - \text{فا(ا)} \qquad (۸)$$

**۵۳ ، ۵ ۔** ذیل کی مثالوں سے اس عمل کی بخوبی توضیح ہو جائیگی :۔

**مثال (۱)** $\int_{۳}^{۵} \text{لا}^{۲}\,\text{فرلا}$ کی قیمت معلوم کرو :۔

ہمیں معلوم ہے کہ $\int \text{لا}^{۲}\,\text{فرلا} = \frac{۱}{۳}\text{لا}^{۳}$ پس

$$\int_{۳}^{۵} \text{لا}^{۲}\,\text{فرلا} = \left[\frac{۱}{۳}\text{لا}^{۳}\right]_{۳}^{۵} = \frac{۱}{۳}\left\{۵^{۳} - ۳^{۳}\right\} = \frac{۱}{۳}\left(۱۲۵ - ۲۷\right)$$

$$= \frac{۹۸}{۳} = ۳۲\frac{۲}{۳}$$

**مثال (۲)** $\int_{-۴}^{-۳} \frac{۱}{\text{لا}^{\frac{۱}{۳}}}\,\text{فرلا}$ کی قیمت معلوم کرو :۔

چونکہ

$$\int \frac{۱}{\text{لا}^{\frac{۱}{۳}}}\,\text{فرلا} = \int \text{لا}^{-\frac{۱}{۳}}\,\text{فرلا} = \frac{\text{لا}^{-\frac{۱}{۳}+۱}}{-\frac{۱}{۳}+۱} = \frac{۳}{۲}\,\text{لا}^{\frac{۲}{۳}}$$

پس

$$\int_{-۴}^{-۳} \frac{۱}{\text{لا}^{\frac{۱}{۳}}}\,\text{فرلا} = \left[\frac{۳}{۲}\,\text{لا}^{\frac{۲}{۳}}\right]_{-۴}^{-۳} = \frac{۳}{۲}\left\{(-۳)^{\frac{۲}{۳}} - (-۴)^{\frac{۲}{۳}}\right\}$$

$$= \frac{۳}{۲}\left[\left\{(-۳)^{۲}\right\}^{\frac{۱}{۳}} - \left\{(-۴)^{۲}\right\}^{\frac{۱}{۳}}\right] = \frac{۳}{۲}\left(۹^{\frac{۱}{۳}} - ۱۶^{\frac{۱}{۳}}\right)$$

**مثال (۳)** $\int_{-۱}^{+۱} \text{لا}^{۳}\,\text{فرلا}$ کی قیمت معلوم کرو :۔

چونکہ $\int \text{لا}^{۳}\,\text{فرلا} = \frac{۱}{۴}\text{لا}^{۴}$

پس

$$\int_{-۱}^{+۱} \text{لا}^{۳}\,\text{فرلا} = \left[\frac{۱}{۴}\text{لا}^{۴}\right]_{-۱}^{+۱} = \frac{۱}{۴}\left\{(۱)^{۴} - (-۱)^{۴}\right\}$$

$$= \frac{۱}{۴}\left\{۱ - ۱\right\} = ۰$$

**مثال (۴)** $\int_{۰}^{\pi} \text{جم لا}\,\text{فرلا}$ کی قیمت معلوم کرو :۔

چونکہ $\int$ جم لا فرلا = جب لا

پس $\int_{0}^{\pi}$ جم لا فرلا = $\left[\right.$جب لا$\left.\right]_{0}^{\pi}$

= جب $\pi$ ۔ جب ۰

= ۰

**مثال (۵)** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}$ جب لا فرلا کی قیمت معلوم کرو:۔

چونکہ $\int$ جب لا فرلا = ۔ جم لا

پس $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}$ جب لا فرلا = $\left[\right.$۔ جم لا$\left.\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}$

= ۔ $\{$ جم $\frac{\pi}{2}$ ۔ جم $(-\frac{\pi}{2})$ $\}$

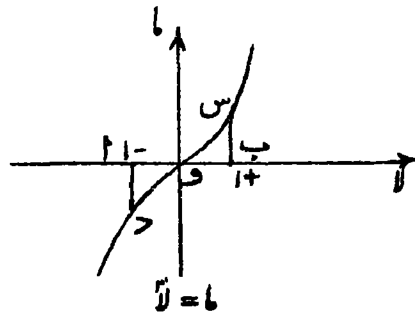
= ۔ $\{$ ۰ ۔ ۰ $\}$

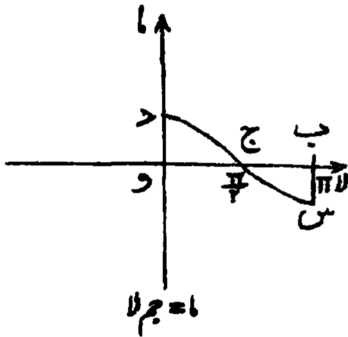
= ۰

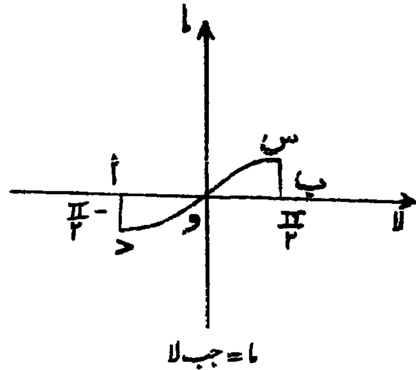
امثلہ ۳ تا ۵ میں ہم دیکھتے ہیں کہ معین تکملہ کی قیمت صفر ہے لیکن تعریف کے بموجب معین تکملہ ایک رقبہ ہوتا ہے اور طالب علم کو یہاں حیرت ہوگی کہ ایک رقبہ کس طرح صفر ہوسکتا ہے جب تک کہ کوئی ایک ضلع صفر نہ ہو۔ اس امر کی توضیح کے لیے ہم بتانا چاہتے ہیں کہ کسی رقبہ کی بھی ایک علامت اسی طرح ہوتی ہے جس طرح ایک خط کی علامت مثبت یا منفی ہوسکتی ہے۔ جو رقبے محور لا کے نیچے واقع ہونگے اُن کی علامت منفی ہوگی اور جو رقبے محور لا کے اوپر واقع ہونگے اُن کی علامت مثبت ہوگی کیونکہ پہلی صورت میں تفاعل کی قیمت یعنے معین ما کی قیمت منفی ہوتی ہے اور دوسری صورت میں تفاعل کی قیمت مثبت ہوتی ہے اور

رقبہ تفاعل کی اس قیمت یعنے معیّن ما کو ایک مثبت فاصلہ یعنے لا = ا سے لے کر لا = ب تک فاصلہ سے ضرب دینے پر حاصل ہوتا ہے۔

وضاحت کی خاطر فرض کرو کہ امثلہ ۳ تا ۵ کے معیّن تکملوں سے تعبیر ہونے والے رقبوں کو شکل میں تعبیر کرتے ہیں۔




اِن تینوں شکلوں میں ہم دیکھتے ہیں کہ ان میں سے ہر رقبہ ا ب س ا د دو مساوی حصوں میں تقسیم ہوتا ہے جن میں سے ایک حصہ محور لا سے اوپر اور دوسرا محور لا کے نیچے واقع ہوتا ہے، یعنے ایک حصّہ مثبت اور دوسرا منفی ہوتا ہے۔ پس ان دونوں حصّوں کا جبری مجموعہ صفر ہے اور اس لیے مطلوبہ معیّن تکملہ کی قیمت بھی صفر ہے۔

یہ بھی ظاہر ہے کہ اگر کسی تفاعل کے رقبہ کا پورا یا زیادہ حصہ

محور لا کے نیچے واقع ہو تو رقبہ منفی حاصل ہوگا یعنے معین تکملہ کی قیمت منفی بھی حاصل ہو سکتی ہے۔

مثال (۶) $\int_0^{\text{و}} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^2+\text{و}^2}$ کو تکمل کرو۔

چونکہ $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^2+\text{و}^2} = \frac{1}{\text{و}}\,\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{و}}$

اس لیے $\int_0^{\text{و}} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^2+\text{و}^2} = \left[\frac{1}{\text{و}}\,\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{و}}\right]_0^{\text{و}} = \frac{1}{\text{و}}\left\{\text{مس}^{-1}\frac{\text{و}}{\text{و}} - \text{مس}^{-1}\frac{0}{\text{و}}\right\}$

$$= \frac{1}{\text{و}}\,\frac{\pi}{4}$$

مثال (۷)۔ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^3\text{لا جب}^2\text{لا فرلا}$ کی قیمت معلوم کرو:-

دفعہ ۴، ۵ کی مثال (۵) میں ہم نے دیکھا ہے کہ

$$\int \text{جم}^3\text{لا جب}^2\text{لا فرلا} = \frac{1}{5}\,\text{جم}^2\text{لا جب}^3\text{لا} - \frac{2}{3\times5}\,\text{جم}^2\text{لا جب لا} + \frac{2}{3\times5}\,\text{جب لا}$$

اس تکملہ کی پہلی دو رقموں میں جم لا اور جب لا دونوں شامل ہیں۔
جزو جم لا کی موجودگی کی وجہ سے حد $\frac{\pi}{2}$ پر اور جزو جب لا کی موجودگی کی وجہ سے حد ۰ پر یہ رقمیں صفر ہو جاتی ہیں، مثلاً

$$\left[\text{جم}^2\text{لا جب}^3\text{لا}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left\{\left(\text{جم}\frac{\pi}{2}\right)^2\left(\text{جب}\frac{\pi}{2}\right)^3 - (\text{جم}\,0)^2(\text{جب}\,0)^3\right\} = 0$$

$$\left[\text{جم}^2\text{لا جب لا}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left\{\left(\text{جم}\frac{\pi}{2}\right)^2\left(\text{جب}\frac{\pi}{2}\right) - (\text{جم}\,0)^2(\text{جب}\,0)\right\} = 0$$

اگر آخری رقم کو انہی حدود پر لیا جائے تو حاصل ہوتا ہے

$$\left[\frac{2}{3\times5}\,\text{جب لا}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3\times5}\left\{\text{جب}\frac{\pi}{2} - \text{جب}\,0\right\}$$

$$= \frac{2}{3\times5}$$

پس $$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^{3}\text{لا}\ \text{جب}^{2}\text{لا}\ \text{فرلا} = \frac{2}{3\times5} = \frac{2}{15}$$

مثال (۸) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^{\text{ن}}\text{لا}\ \text{جب}^{\text{م}}\text{لا}\ \text{فرلا}$ کی قیمت معلوم کرو جہاں م اور ن کوئی مثبت صحیح عدد ہیں۔

اس سوال میں ن اور م کے طاق یا جفت ہونے کے لحاظ سے چار صورتیں پیش آتی ہیں۔

(ا) اگر ن اور م دونوں طاق ہیں تو دفعہ ۴ و ۵ کی مثال ۸ مساوات (۴) سے معلوم ہے کہ

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^{\text{ن}}\text{لا}\ \text{جب}^{\text{م}}\text{لا}\ \text{فرلا} = \frac{1}{\text{ن+م}}\ \text{جم}^{\text{ن}-1}\text{لا}\ \text{جب}^{\text{م}+1}\text{لا} - \frac{1}{\text{ن+م}}\ \frac{\text{ن}-1}{\text{ن+م}-2}\ \text{جم}^{\text{ن}-1}\text{لا}\ \text{جب}^{\text{م}-1}\text{لا}$$

$$+\cdots+ \frac{(\text{ن}-1)(\text{ن}-3)\cdots4\times2\ (\text{م}-1)(\text{م}-3)\cdots4\times2}{(\text{ن+م})(\text{ن+م}-2)\cdots\cdots4\times2}\ \text{جب}^{2}\text{لا}$$

چونکہ آخری رقم کے سوا باقی تمام رقموں میں جب لا اور جم لا دونوں شامل ہیں اس لیے حدود ۰ اور $\frac{\pi}{2}$ پر یہ تمام رقمیں صفر ہو جائینگی اور صرف آخری رقم رہ جائیگی۔ نیز

$$\left[\frac{(\text{ن}-1)(\text{ن}-3)\cdots4\times2\ (\text{م}-1)(\text{م}-3)\cdots4\times2}{(\text{ن+م})(\text{ن+م}-2)(\text{ن+م}-4)\cdots4\times2}\ \text{جب}^{2}\text{لا}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{(\text{ن}-1)(\text{ن}-3)\cdots4\times2\ (\text{م}-1)\cdots2}{(\text{ن+م})(\text{ن+م}-2)\cdots4\times2}\left\{\text{جب}^{2}\frac{\pi}{2}-\text{جب}^{2}0\right\}$$

$$= \frac{(\text{ن}-1)(\text{ن}-3)\cdots2\ (\text{م}-1)\cdots2}{(\text{ن+م})(\text{ن+م}-2)\cdots4\times2}\times1$$

پس اگر ن اور م دونوں طاق ہوں تو

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^{\text{ن}}\text{لا}\ \text{جب}^{\text{م}}\text{لا}\ \text{فرلا} = \frac{(\text{ن}-1)\cdots2\ (\text{م}-1)\cdots2}{(\text{ن+م})(\text{ن+م}-2)\cdots4\times2}\times1 \qquad (1)$$

اسی طرح باقی تمام صورتوں میں بھی آخری رقم کے سوا باقی سب رقمیں دونوں حدود ۰ اور $\frac{\pi}{2}$ پر صفر ہو جائینگی اس لیے صرف آخری رقموں کی قیمت

معلوم کرلینا کافی ہے۔

(ب) اگر ن طاق اور م جفت ہو تو دفعہ ۴ ، ۵ کی مثال ۸ مساوات (۵) سے ظاہر ہے کہ

$$\left[\frac{(ن-۱)(ن-۳)\cdots ۲\times(م-۱)(م-۳)\cdots ۳\times۱}{(ن+م)(ن+م-۲)\cdots ۵\times۳\times۱}\,\text{جب}\,لا\right]_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}$$

$$=\frac{(ن-۱)\cdots ۲\times(م-۱)\cdots ۳\times۱}{(ن+م)(ن+م-۲)\cdots ۳\times۱}\left\{\text{جب}\,\frac{\pi}{۲}-۰\right\}$$

پس اگر ن طاق اور م جفت ہو تو

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\text{جم}^{ن}لا\,\text{جب}^{م}لا\,\text{فر}لا=\frac{(ن-۱)(ن-۳)\cdots ۲\times(م-۱)(م-۳)\cdots ۳\times۱}{(ن+م)(ن+م-۲)\cdots ۵\times۳\times۱}\times۱ \qquad (۲)$$

(ج) اگر ن جفت اور م طاق ہو تو دفعہ ۴ ، ۵ کی مثال ۸ مساوات (۶) سے ظاہر ہے کہ

$$-\left[\frac{(ن-۱)\cdots ۳\times۱\,(م-۱)\cdots ۴\times۲}{(ن+م)(ن+م-۲)\cdots ۵\times۳\times۱}\,\text{جم}\,لا\right]_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}$$

$$=-\frac{(ن-۱)\cdots ۳\times۱\,(م-۱)\cdots ۴\times۲}{(ن+م)(ن+م-۲)\cdots ۵\times۳\times۱}\left\{\text{جم}\,\frac{\pi}{۲}-\text{جم}\,۰\right\}$$

پس اگر ن جفت اور م طاق ہو تو

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\text{جم}^{ن}لا\,\text{جب}^{م}لا\,\text{فر}لا=\frac{(ن-۱)(ن-۳)\cdots ۳\times۱\,(م-۱)(م-۳)\cdots ۴\times۲}{(ن+م)(ن+م-۲)\cdots ۵\times۳\times۱}\times۱ \qquad (۳)$$

(د) اگر ن اور م دونوں جفت ہوں تو دفعہ ۴ ، ۵ کی مثال ۸ مساوات (۸) سے معلوم ہے کہ

$$\left[\frac{(ن-۱)\cdots ۳\times۱\,(م-۱)\cdots ۳\times۱}{(ن+م)(ن+م-۲)\cdots ۴\times۲}\,لا\right]_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}$$

$$=\frac{(ن-۱)\cdots ۳\times۱\,(م-۱)\cdots ۳\times۱}{(ن+م)(ن+م-۲)\cdots ۴\times۲}\left\{\frac{\pi}{۲}-۰\right\}$$

پس اگر ن اور م دونوں جفت ہوں تو

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^{\text{ن}}\,\text{لا}\ \text{جب}^{\text{م}}\,\text{لا}\ \text{فرلا} = \frac{(\text{ن}-1)(\text{ن}-3)\cdots \times 1\times 3 \times \cdots (\text{م}-1)(\text{م}-3)\cdots}{2\times 4\times 6\times \cdots (\text{ن}+\text{م}-2)(\text{ن}+\text{م})} \times \frac{\pi}{2} \qquad (۴)$$

صرف اس صورت میں جبکہ ن اور م دونوں جفت ہوں آخری عدد $\frac{\pi}{2}$ حاصل ہوتا ہے ورنہ باقی تمام صورتوں میں آخری حاصل ضرب ۱ ہوتا ہے۔

حسب ذیل عددی مثالوں سے یہ قاعدے بخوبی واضح ہونگے:۔

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^{5}\,\text{لا}\ \text{جب}^{7}\,\text{لا}\ \text{فرلا} = \frac{2\times 4\times 6\times 2\times 4}{2\times 4\times 6\times 8\times 10\times 12} \times 1 = \frac{1}{120}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^{5}\,\text{لا}\ \text{جب}^{6}\,\text{لا}\ \text{فرلا} = \frac{1\times 3\times 5\times 2\times 4}{3\times 5\times 7\times 9\times 11} \times 1 = \frac{8}{693}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^{8}\,\text{لا}\ \text{جب}^{9}\,\text{لا}\ \text{فرلا} = \frac{2\times 4\times 6\times 8\times 1\times 3\times 5\times 7}{1\times 3\times 5\times 7\times 9\times 11\times 13\times 15\times 17} = \frac{384}{328205}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^{8}\,\text{لا}\ \text{جب}^{10}\,\text{لا}\ \text{فرلا} = \frac{1\times 3\times 5\times 7\times 9\times 1\times 3\times 5\times 7}{2\times 4\times 6\times 8\times 10\times 12\times 14\times 16\times 18} \times \frac{\pi}{2}$$

مثلہ ۷، ۸ اور ۹ کے نتیجوں کی نظری اور عملی ریاضی میں اکثر ضرورت پڑتی ہے طالب علم کو چاہیے کہ ان نتائج کو بخوبی ذہن نشین کرلے۔

# مشقی سوالات ۲۵

حسبِ ذیل معین تکملوں کی قیمت دریافت کرو:—

(۱) $\int_{0}^{1} \left(\text{لا}^{3} + \frac{1}{2}\text{لا}^{2} - 11\,\text{لا} + \frac{7}{2}\right)\text{فرلا}$ (۲) $\int_{2}^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{4\,\text{لا}^{2} - 9}$

(۳) $\int_{0}^{\frac{2}{3}} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{4 - 9\,\text{لا}^{2}}}$ (۴) $\int_{2}^{4} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}^{2} - 4}}$

(۵) $\int_{-3}^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{2} + 6\,\text{لا} + 18}$

(۶) $\int_{-\frac{۲}{۵}}^{\frac{۱۳}{۵}} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{۲۱ - ۲۰\text{لا} - ۲۵\text{لا}^۲}}$ (۷) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{۱}{۲\,\text{جم}^۲\text{لا} + ۸\,\text{جب}^۲\text{لا}}\,\text{فرلا}$

(۸) $\int_{\frac{۱}{۲}}^{۱} \frac{۱ - \text{لا}}{۱ - \text{لا} + \text{لا}^۲}\,\text{فرلا}$ (۹) $\int_{۰}^{\pi} \text{جب}^۲\text{لا}\,\text{فرلا}$

(۱۰) $\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi} \frac{۱}{۵ + ۴\,\text{جب}\,\text{لا}}\,\text{فرلا}$ (۱۱) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جب}^۲ ۳\text{ط}\,\text{فرط}$

(۱۲) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جب}^۴\text{ط}\,\text{فرط}$ (۱۳) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جم}^۵\text{ط}\,\text{فرط}$

(۱۴) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جب}^۴\text{ط}\,\text{جم}^۶\text{ط}\,\text{فرط}$ (۱۵) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جب}^۳\text{ط}\,\text{جم}^۴\text{ط}\,\text{فرط}$

(۱۶) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جب}^۴\text{ط}\,\text{جم}^۵\text{ط}\,\text{فرط}$

## ۶،۵ - معین تکملہ میں متغیر کی تبدیلی :-

دفعہ ۲،۵ میں جب ہم نے غیر معین تکملہ میں متغیر کی تبدیلی کا قاعدہ بیان کیا تھا تو اُسی کے ساتھ یہ بھی ذکر کیا تھا کہ جب کبھی ایک غیر معین تکملہ میں متغیر کو لا سے ما میں تبدیل کیا جائے تو آخری جواب بیان کرتے وقت پھر معکوس تبدیلی کے ذریعہ ما کو لا میں تبدیل کرنا چاہیے۔

لیکن معین تکملہ چونکہ لا یا ما کسی کا تفاعل نہیں ہے بلکہ ایک مستقل عدد ہے اس لیے اگر ہم متکمل کو بدلنے کے ساتھ تکمل کے حدود ا اور ب کو بھی بدل دیں تو جواب کو بالراست تبدیل شدہ متغیر کے ذریعہ حاصل کر سکتے ہیں پھر دوبارہ ابتدائی متغیر میں لانے کی ضرورت نہیں پڑتی۔

مثلاً فرض کرو کہ ہم کو $\int_{\text{لا}_۱}^{\text{لا}_۲} \text{ف}(\text{لا})\,\text{فرلا}$ معین تکملہ معلوم کرنا ہے

جہاں $\text{لا}_1$ اور $\text{لا}_2$ دو مستقل قیمتیں ہیں۔ متکمل ف (لا) کو معیاری شکل میں لانے کے لیے فرض کرو کہ ہم

$$\text{لا} = \text{فہ}(\text{ع})\text{،}\quad \frac{\text{فرلا}}{\text{فرع}} = \text{فہَ}(\text{ع})\text{،}\quad \text{فرلا} = \text{فہَ}(\text{ع})\,\text{فرع} \qquad (1)$$

رکھتے ہیں۔ مساوات (۱) میں چونکہ لا اور ع ایک دوسرے پر منحصر ہیں اس لیے لا کی ہر قیمت کے جواب میں ع کی متناظر قیمت ملتی ہے یعنے

$$\text{لا} = \text{لا}_1 \text{ تو } \text{ع} = \text{ع}_1 \text{،}\quad \text{لا} = \text{لا}_2 \text{ تو } \text{ع} = \text{ع}_2 \qquad (2)$$

پس

$$\int_{\text{لا}_1}^{\text{لا}_2} \text{ف}(\text{لا})\,\text{فرلا} = \int_{\text{ع}_1}^{\text{ع}_2} \text{ف}\{\text{فہ}(\text{ع})\}\,\text{فہَ}(\text{ع})\,\text{فرع}$$

یعنے اگر $\text{سہ}(\text{ع}) = \text{ف}\{\text{فہ}(\text{ع})\}\,\text{فہَ}(\text{ع})$ تو

$$\int_{\text{لا}_1}^{\text{لا}_2} \text{ف}(\text{لا})\,\text{فرلا} = \int_{\text{ع}_1}^{\text{ع}_2} \text{سہ}(\text{ع})\,\text{فرع} \qquad (3)$$

اس لیے آخری جواب معلوم کرنے کے لیے سہ (ع) کا معین تکملہ $\text{ع}_1$ سے $\text{ع}_2$ تک معلوم کرلینا کافی ہے۔ پھر دوبارہ لا میں تبدیل کرنے کی ضرورت نہیں۔
ذیل کی مثالوں سے یہ امر بخوبی واضح ہوجائیگا۔

مثال (۱) $\int_0^1 (4\,\text{لا} + 1)^{\frac{3}{2}}\,\text{فرلا}$ کی قیمت معلوم کرو۔

رکھو $\text{ما} = 4\,\text{لا} + 1$ یعنے $\text{لا} = \frac{1}{4}(\text{ما} - 1)$

تو

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = \frac{1}{4}\text{،}\quad \text{فرلا} = \frac{1}{4}\,\text{فرما}$$

نیز $\text{لا} = 0$ تو $\text{ما} = 1$، $\text{لا} = 1$ تو $\text{ما} = 4 \times 1 + 1 = 5$

پس

$$\int_{\text{لا}=0}^{\text{لا}=1} (4\,\text{لا} + 1)^{\frac{3}{2}}\,\text{فرلا} = \frac{1}{4}\int_{\text{ما}=1}^{\text{ما}=5} \text{ما}^{\frac{3}{2}}\,\text{فرما} = \frac{1}{4}\left[\frac{\text{ما}^{\frac{3}{2}+1}}{1+\frac{3}{2}}\right]_1^5$$

$$= \frac{۱}{۴}\left\{ \frac{۵^{\frac{۵}{۲}}}{\frac{۵}{۲}} - \frac{۱}{\frac{۵}{۲}} \right\} = \frac{۱}{۱۰}\left\{ ۲۵\sqrt{۵} - ۱ \right\}$$

مثال (۲) - $\int_{۰}^{۱} \frac{\text{لا}}{\sqrt{۱+\text{لا}^{۲}}}\,\text{فرلا}$ کی قیمت معلوم کرو -

رکھو $\text{لا} = \text{مس طہ}$، تب $\text{طہ} = \text{مس}^{-۱}\,\text{لا}$

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرطہ}} = \text{قط}^{۲}\text{طہ}،\quad \text{فرلا} = \text{قط}^{۲}\text{طہ فرطہ}$$

$$\sqrt{۱+\text{لا}^{۲}} = \sqrt{۱+\text{مس}^{۲}\text{طہ}} = \text{قط طہ}$$

$\text{لا} = ۰$ تو $\text{طہ} = ۰$، $\text{لا} = ۱$ تو $\text{طہ} = \frac{\pi}{۴}$

پس $$\int_{۰}^{۱} \frac{۱}{\sqrt{۱+\text{لا}^{۲}}}\,\text{فرلا} = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} \frac{\text{مس طہ قط}^{۲}\text{طہ فرطہ}}{\text{قط طہ}}$$

$$= \int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} \text{مس طہ قط طہ فرطہ} = \Big[\text{قط طہ}\Big]_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}$$

$$= \text{قط}\,\frac{\pi}{۴} - \text{قط}\,۰ \quad = \sqrt{۲} - ۱$$

مثال (۳) $\int_{۰}^{۱۶} \frac{\text{لا}^{\frac{۱}{۲}}}{۱+\text{لا}^{\frac{۱}{۴}}}\,\text{فرلا}$ کی قیمت معلوم کرو۔

رکھو $\text{لا} = \text{ع}^{۴}$، $\text{ع} = \text{لا}^{\frac{۱}{۴}}$، $\text{ع}^{۲} = \text{لا}^{\frac{۱}{۲}}$

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرع}} = ۴\text{ع}^{۳}،\quad \text{فرلا} = ۴\text{ع}^{۳}\,\text{فرع}$$

$\text{لا} = ۰$ تو $\text{ع} = ۰$، $\text{لا} = ۱۶$ تو $\text{ع} = ۱۶^{\frac{۱}{۴}} = ۲$

پس $$\int_{۰}^{۱۶} \frac{\text{لا}^{\frac{۱}{۲}}}{۱+\text{لا}^{\frac{۱}{۴}}}\,\text{فرلا} = ۴\int_{۰}^{۲} \frac{\text{ع}^{۲}\times\text{ع}^{۳}}{۱+\text{ع}^{۲}}\,\text{فرع} = ۴\int_{۰}^{۲} \frac{\text{ع}^{۵}}{۱+\text{ع}^{۲}}\,\text{فرع}$$

لیکن $$\frac{\text{ع}^{۵}}{۱+\text{ع}^{۲}} = \frac{\text{ع}^{۵}-۱+۱}{۱+\text{ع}^{۲}} = \frac{\text{ع}^{۵}-۱}{۱+\text{ع}^{۲}} + \frac{۱}{۱+\text{ع}^{۲}}$$

$$= (\text{ع}^{۲}-۱) + \frac{۱}{۱+\text{ع}^{۲}}$$

پس $\int_{0}^{16} \frac{لا^{\frac{1}{2}}}{1 + لا^{\frac{1}{4}}} فرلا = 4\int_{0}^{2} (ع^{2} - 1)\, فرع + 4\int_{0}^{2} \frac{1}{1 + ع^{2}}\, فرع$

$= 4\left[\frac{ع^{3}}{3} - ع\right]_{0}^{2} + 4\left[مس^{-1} ع\right]_{0}^{2}$

$= 4\left\{\frac{8}{3} - 2\right\} + 4\left\{مس^{-1} 2\right\} = \frac{8}{3} + 4\, مس^{-1} 2$

اسی طرح اگر کسی معین تکملہ میں کئی مرتبہ متغیر کو تبدیل کرنے کی ضرورت پڑے تو ہر مرتبہ تکمل کے حدود کو بھی ساتھ ہی ساتھ بدلتے جانا چاہیے۔

## مشقی سوالات ۲۶

حسب ذیل تکملوں کی قیمت معلوم کرو:-

(۱) $\int_{2}^{3} \sqrt{3لا - 5}\, فرلا$ (۲) $\int_{0}^{4} \frac{فرلا}{\sqrt{5 - لا}}$

(۳) $\int_{2}^{6} \sqrt{لا - 2}\, فرلا$ (۴) $\int_{0}^{6} \left(\sqrt{6} - \sqrt{لا}\right)^{2} فرلا$

(۵) $\int_{0}^{2} لا^{2} \sqrt{1 + لا^{3}}\, فرلا$ (۶) $\int_{0}^{1} \frac{فرلا}{9لا^{2} - 6لا + 1}$

(۷) $\int_{3}^{4} \frac{فرلا}{لا\sqrt{25 - لا^{2}}}$ (۸) $\int_{1}^{2} \frac{\sqrt{لا^{2} - 1}}{لا}\, فرلا$

(۹) $\int_{0}^{3} \frac{لا^{2}\, فرلا}{\sqrt{16 - لا^{2}}}$ (۱۰) $\int_{0}^{ا} \sqrt{ب^{2} - \frac{ب^{2} لا^{2}}{ا^{2}}}\, فرلا$

## ۷،۵- مثلثی ابدال -

اکثر تفاعلوں کو جن میں مقادیر اصم مثلاً جذر المربع وغیرہ شامل ہوں تکمل کرنے کے لیے ایک بہت مفید اور کار آمد طریقہ یہ ہے کہ متغیر لا کو بدل کر مثلثی تفاعل

جب طہ، جم طہ، مس طہ یا قط طہ داخل کیے جائیں - اس کی مدد سے تفاعل بالعموم $\text{جب}^{\text{م}}\,\text{طہ}\ \text{جم}^{\text{ن}}\,\text{طہ}$ یا $\text{مس}^{\text{م}}\,\text{طہ}$، $\text{قط}^{\text{ن}}\,\text{طہ}$، وغیرہ شکل میں متغیر ہو جاتے ہیں اور ان آخری تکملوں کو ہم گذشتہ دفعات کی مدد سے معلوم کر سکتے ہیں -

مثال (۱) پہلی مثال کے طور پر تکملہ $\int \sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}\ \text{فلا}$ پر غور کرو جس کی قیمت اس سے قبل ہم دو مرتبہ مختلف طریقوں سے معلوم کر چکے ہیں۔

رکھو $\text{لا} = \text{ا جب طہ}$، تو $\frac{\text{فلا}}{\text{فطہ}} = \text{ا جم طہ}$، $\text{فلا} = \text{ا جم طہ فطہ}$

$$\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2} = \sqrt{\text{ا}^2 - \text{ا}^2\,\text{جب}^2\,\text{طہ}} = \sqrt{\text{ا}^2\,(۱ - \text{جب}^2\,\text{طہ})} = \sqrt{\text{ا}^2\,\text{جم}^2\,\text{طہ}} = \text{ا جم طہ}$$

پس

$$\int \sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}\ \text{فلا} = \int \text{ا جم طہ}\,.\,\text{ا جم طہ فطہ} = \text{ا}^2 \int \text{جم}^2\,\text{طہ فطہ}$$

$$= \text{ا}^2 \int \frac{۱ + \text{جم ۲طہ}}{۲}\ \text{فطہ} = \frac{\text{ا}^2}{۲}\,.\,\frac{\text{جب ۲طہ}}{۲} + \frac{\text{ا}^2}{۲}\,\text{طہ} + \text{ک}$$

$$= \frac{\text{ا}^2}{۲}\ \text{جب طہ جم طہ} + \frac{\text{ا}^2}{۲}\,\text{طہ} + \text{ک}$$

اب چونکہ یہ تکملہ غیر معین ہے اس لیے آخری جواب لا کی رقوم میں دریافت کرنا چاہیے -

پس $\text{جب طہ} = \frac{\text{لا}}{\text{ا}}$ ، $\text{جم طہ} = \frac{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}}{\text{ا}}$ ، $\text{طہ} = \text{جب}^{-۱}\,\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$

اس لیے

$$\int \sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}\ \text{فلا} = \frac{\text{لا}\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}}{۲} + \frac{\text{ا}^2}{۲}\,\text{جب}^{-۱}\,\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \text{ک}$$

یہ قیمت وہی ہے جو مذکورۂ بالا دونوں طریقوں سے حاصل ہوئی تھی (دیکھو دفعہ ۲، ۵ مثال ۲۳ اور دفعہ ۴، ۵ مثال ۵) -

مثال (۲) $\int \frac{\text{لا}^2}{\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ا}^2}}\ \text{فلا}$ کی قیمت معلوم کرو :-

رکھو $\text{لا} = \text{ا}\,\text{مس طہ}$، $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرطہ}} = \text{ا}\,\text{قط}^2\text{طہ}$، $\text{فرلا} = \text{ا}\,\text{قط}^2\text{طہ}\;\text{فرطہ}$

$$\sqrt{\text{لا}^2+\text{ا}^2} = \sqrt{\text{ا}^2\text{مس}^2\text{طہ}+\text{ا}^2} = \sqrt{\text{ا}^2\text{قط}^2\text{طہ}} = \text{ا}\,\text{قط طہ}$$

پس $\int \frac{\text{لا}^3}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{لا}^2}}\,\text{فرلا} = \int \frac{\text{ا}^3\text{مس}^3\text{طہ}\cdot\text{ا}\,\text{قط}^2\text{طہ}}{\text{ا}\,\text{قط طہ}}\,\text{فرطہ} = \int \text{ا}^3\text{مس}^3\text{طہ}\;\text{قط طہ}\;\text{فرطہ}$

$$= \int \text{ا}^3\text{مس}^2\text{طہ}\cdot\text{مس طہ}\;\text{قط طہ}\;\text{فرطہ} = \text{ا}^3\cdot\int(\text{قط}^2\text{طہ}-1)\,\text{مس طہ}\;\text{قط طہ}\;\text{فرطہ}$$

$$= \text{ا}^3\frac{\text{قط}^3\text{طہ}}{3} - \text{ا}^3\,\text{قط طہ} + \text{ک}$$

$$= \frac{\text{ا}^3}{3}(1+\text{مس}^2\text{طہ})^{\frac{3}{2}} - \text{ا}^3(1+\text{مس}^2\text{طہ})^{\frac{1}{2}} + \text{ک}$$

$$= \frac{\text{ا}^3}{3}\left\{1+\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}\right\}^{\frac{3}{2}} - \text{ا}^3\left\{1+\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}\right\}^{\frac{1}{2}} + \text{ک}$$

$$= \frac{1}{3}(\text{ا}^2+\text{لا}^2)^{\frac{3}{2}} - \text{ا}^2\sqrt{\text{ا}^2+\text{لا}^2} + \text{ک}$$

مثال (۳) $\int \frac{\sqrt{\text{لا}^2-\text{ا}^2}}{\text{لا}^2}\,\text{فرلا}$ کی قیمت معلوم کرو۔

رکھو $\text{لا} = \text{ا}\,\text{قط طہ}$، $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرطہ}} = \text{ا}\,\text{قط طہ}\;\text{مس طہ}$، $\text{فرلا} = \text{ا}\,\text{قط طہ}\;\text{مس طہ}\;\text{فرطہ}$

$$\sqrt{\text{لا}^2-\text{ا}^2} = \sqrt{\text{ا}^2\text{قط}^2\text{طہ}-\text{ا}^2} = \sqrt{\text{ا}^2\text{مس}^2\text{طہ}} = \text{ا}\,\text{مس طہ}$$

پس $\int \frac{\sqrt{\text{لا}^2-\text{ا}^2}}{\text{لا}^2}\,\text{فرلا} = \int \frac{\text{ا}\,\text{مس طہ}}{\text{ا}^2\text{قط}^2\text{طہ}}\;\text{ا}\,\text{قط طہ}\;\text{مس طہ}\;\text{فرطہ} = \int \frac{\text{مس}^2\text{طہ}}{\text{قط طہ}}\,\text{فرطہ}$

$$= \int \frac{\text{قط}^2\text{طہ}-1}{\text{قط طہ}}\,\text{فرطہ} = \int(\text{قط طہ}-\text{جم طہ})\,\text{فرطہ}$$

$$= \text{لوک}\,(\text{مس طہ}+\text{قط طہ}) - \text{جب طہ} + \text{ک}$$

$$= \text{لوک}\left\{\frac{\text{لا}+\sqrt{\text{لا}^2-\text{ا}^2}}{\text{ا}}\right\} - \frac{\sqrt{\text{لا}^2-\text{ا}^2}}{\text{لا}} + \text{ک}$$

ان تین مثالوں سے ظاہر ہے کہ اگر تکمل میں $\sqrt{\text{ا}^2-\text{لا}^2}$ شامل ہو تو

لا = ا جب طہ یا لا = ا جم طہ رکھنا چاہیے ۔ اگر تکمل میں √(ا² + لا²) شامل ہو تو لا = ا مس طہ رکھنا چاہیے اور اگر تکمل میں √(لا² - ا²) شامل ہو تو لا = ا قط طہ رکھنا چاہیے ۔

شلثی ابدال کا فائدہ زیادہ تر معین تکملوں میں معلوم ہوتا ہے جہاں پیچیدہ تکملوں کی قیمت آسانی سے حاصل ہو جاتی ہے ۔

**مثال (۴)** ∫₀^ا لا⁴ (ا² - لا²)^(۵/۲) فرلا کی قیمت معلوم کرو ۔

رکھو لا = ا جم طہ (لا = ا جب طہ رکھیں بھی تو یہی قیمت حاصل ہوگی)

ا² - لا² = ا² - ا² جم² طہ = ا² جب² طہ

فرلا / فرطہ = - ا جب طہ ،

لا = ۰ تو طہ = π/۲ ، لا = ا تو طہ = ۰

پس ∫₀^ا لا⁴ (ا² - لا²)^(۵/۲) فرلا = - ∫_(π/۲)^۰ ا⁴ جم⁴ طہ . (ا² جب² طہ)^(۵/۲) ا جب طہ فرطہ

= + ∫₀^(π/۲) ا⁴ جم⁴ طہ . ا⁵ جب⁵ طہ . ا جب طہ فرطہ

= ا¹⁰ ∫₀^(π/۲) جم⁴ طہ جب⁶ طہ فرطہ

∫₀^(π/۲) جم^ن لا جب^م لا فرلا کے لیے دفعہ ۳۵ و ۵ کی مثال ۹ مساوات (۴) استعمال کر سکتے ہیں کیونکہ یہاں ن = ۴، م = ۶ دونوں جفت ہیں ۔

اس لیے

∫₀^ا لا⁴ (ا² - لا²)^(۵/۲) فرلا = ا¹⁰ [(۴-۱) (۴-۳) (۶-۱) (۶-۳) (۶-۵)] / [۱۰ (۱۰-۲) (۱۰-۴) (۱۰-۶) (۱۰-۸)] × π/۲

= ۳π/۵۱۲

مثال (۵) ∫ (۰ سے ا تک) لا۲ √(ا - لا) فرلا کی قیمت معلوم کرو۔

رکھو لا = ا جب۲ طہ ، فرلا/فرطہ = ۲ ا جب طہ جم طہ

ا - لا = ا - ا جب۲ طہ = ا جم۲ طہ

لا = ۰ تو طہ = ۰ ، لا = ا تو طہ = ط/۲

پس ∫ (۰ سے ا تک) لا۲ √(ا - لا) فرلا = ∫ (۰ سے ط/۲ تک) ا۲ جب۴ طہ . √ا جم طہ . ۲ ا جب طہ جم طہ فرطہ

= ۲ ا^(۷/۲) ∫ (۰ سے ط/۲ تک) جب۵ طہ جم۲ طہ فرطہ

= ۲ ا^(۷/۲) . [(۱-۲) . (۳-۵) (۱-۵)] / [(۶-۷) (۴-۷) (۲-۷) ۷] × ۱

= (۱۶/۱۰۵) ا^(۷/۲)

مثال (۶) ∫ (۰ سے ۲ا تک) لا۳ √(۲ الا - لا۲) فرلا کی قیمت معلوم کرو۔

رکھو لا = ۲ ا جب۲ طہ ، فرلا/فرطہ = ۴ ا جب طہ جم طہ

۲ الا - لا۲ = ۲ ا . ۲ ا جب۲ طہ - ۴ ا۲ جب۴ طہ = ۴ ا۲ جب۲ طہ (۱ - جب۲ طہ)

لا = ۰ تو طہ = ۰ ، لا = ۲ ا تو طہ = ط/۲

پس ∫ (۰ سے ۲ا تک) لا۳ √(۲ الا - لا۲) فرلا = ∫ (۰ سے ط/۲ تک) ۸ ا۳ جب۶ طہ . ۲ ا جب طہ جم طہ . ۴ ا جب طہ جم طہ فرطہ

= ۶۴ ا۵ ∫ (۰ سے ط/۲ تک) جم۲ طہ جب۸ طہ فرطہ

= ۶۴ ا۵ [(۷-۸) (۵-۸) (۳-۸) (۱-۸) (۱-۲)] / [(۸-۱۰) (۶-۱۰) (۴-۱۰) (۲-۱۰) ۱۰] × ط/۲

= ۲۱ ط ا۵ / ۲۴

# مشقی سوالات ۲۷

حسبِ ذیل تکملوں کی قیمت دریافت کرو :-

(۱) $\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{ر}^۲ - \text{لا}^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$

(۲) $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}\sqrt{۴\text{لا}^۲ + ۹}}$

(۳) $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^۲\sqrt{\text{لا}^۲ - ۳}}$

(۴) $\int \frac{\sqrt{\text{لا}^۲ - ۱۶}}{\text{لا}}\,\text{فرلا}$

(۵) $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^۲\sqrt{۵ - \text{لا}^۲}}$

(۶) $\int \frac{\sqrt{\text{لا}^۲ - ۳۶}}{\text{لا}^۲}\,\text{فرلا}$

(۷) $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}\sqrt{۹ - \text{لا}^۲}}$

(۸) $\int \frac{\sqrt{۴ - \text{لا}^۲}}{\text{لا}^۲}\,\text{فرلا}$

(۹) $\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا}^۲ + ۴\text{لا} + ۷)^۲}$

(۱۰) $\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}(\text{ر} - \text{لا})}}$

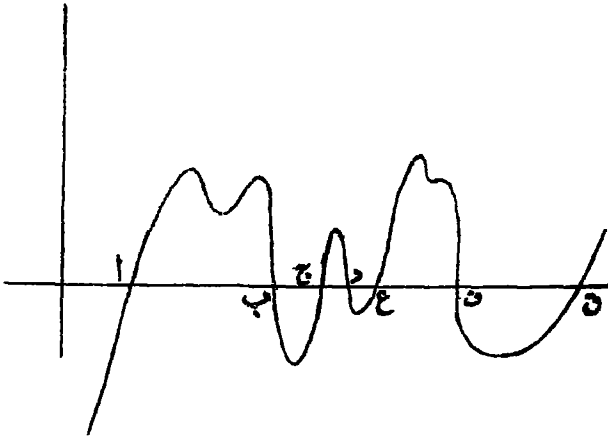
(۱۱) $\int_{۰}^{\pi} \frac{\text{فرلا}}{\text{ر}^۲\,\text{جم}^۲\text{لا} + \text{ب}^۲\,\text{جب}^۲\text{لا}}$

(۱۲) $\int_{۰}^{۱} \frac{\text{فرلا}}{۱ + \text{لا} + \text{لا}^۲}$

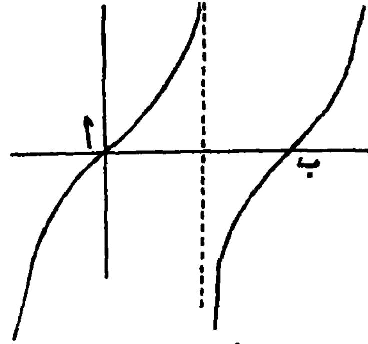
(۱۳) $\int_{۰}^{۱} \frac{\text{فرلا}}{۱ - \text{لا} + \text{لا}^۲}$

# باب ششم

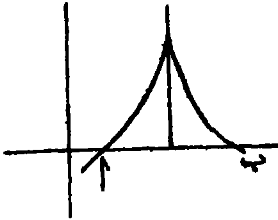
**۶٫۱ - رول کا مسئلہ :-** اگر ف (لا) متغیر لا کا مسلسل تفاعل ہو اور لا = ل اور لا = ب کے لیے ف (لا) صفر کے مساوی ہو یعنی ف (ل) = ف (ب) = صفر، نیز ان حدود میں فَ (لا) مسلسل ہو تو رول کا مسئلہ بیان کرتا ہے کہ فَ (لا) کی قیمت ل اور ب کے درمیان لا کی کم از کم ایک قیمت، کے لیے صفر ہوگی یعنی فَ (لا$_1$) = ۰ جہاں ل < لا$_1$ < ب




شکل ۱ء۶




شکل ۔۲




شکل ۔۳

شکل (۱) سے ظاہر ہے کہ ف (لا) = ۰ کی ہر دو اصلوں کے درمیان فَ (لا) کم از کم ایک مرتبہ اور بعض صورتوں میں ۳، ۵، ... وغیرہ طاق مرتبہ صفر ہے۔ شکل (۲) اور (۳) میں مسئلہ کی شرائط پوری نہیں ہوتی ہیں۔ شکل (۲) میں منحنی اور ڈھال دونوں غیر مسلسل ہیں اور شکل (۳) میں ڈھال غیر مسلسل ہے اس لیے مسئلہ رول کا ان پر اطلاق نہیں ہو سکتا۔ مسئلہ کو ثابت کرنے کے لیے ف (ا) = ف (ب) = صفر

اب یا تو تفاعل ف (لا) نقاط ا اور ب کے درمیان تمام نقطوں پر صفر رہیگا اور ایسی صورت میں لا کی تمام قیمتوں کے لیے ف (لا) = ۰ اور اس لیے فَ (لا) = ۰ اور مسئلہ ثابت ہو گیا یا نقطہ ا کے بعد ف (لا) کی قیمت بڑھیگی یا گھٹیگی۔ اگر بڑھیگی تو فَ (لا) مثبت ہوگا۔ اور پھر ف (ب) = ۰ کے لیے ضروری ہے کہ کسی نقطہ کے بعد ف (لا) کی قیمت گھٹنا شروع کرے یعنی فَ (لا) منفی ہو۔ اب اگر ف (لا) اور فَ (لا) مسلسل ہوں تو ضروری ہے کہ کسی نقطہ پر فَ (لا) نہ مثبت ہوگا نہ منفی یعنی فَ (لا) = صفر اور مسئلہ رول ثابت ہو گیا۔

اگر نقطہ ا کے بعد ف (لا) گھٹتا تو ف (ب) = ۰ کے لیے ضروری ہے کہ کسی نہ کسی نقطہ کے بعد بڑھنا شروع کرے اور اس نقطہ پر فَ (لا) نہ منفی ہو سکتا ہے اور نہ مثبت۔ اس لیے فَ (لا) صفر ہوگا اور مسئلہ ثابت ہو گیا۔ بہت ممکن ہے کہ ا اور ب کے درمیان ف (لا) یکے بعد دیگرے کئی مرتبہ بڑھے

اور کئی مرتبہ گھٹے ۔ ایسی صورت میں ا اور ب کے درمیان فَ (لا) ایک سے زیادہ طاق مرتبہ صفر ہوگا ۔ اگر نقطہ ب کے بجائے ا + ھ لکھیں تو مسئلہ کو یوں لکھ سکتے ہیں :-

کہ ف (ا) = ف (ا + ھ) = ۰ تو فَ (ا + طھ) = ۰ جہاں ۰ > ط > ۱

یعنی ط مثبت کسرِ واجب ہے ۔

چونکہ یہ مسئلہ بہت اہم ہے اس کا ایک تحلیلی ثبوت مع قیود کے دیا جائیگا ۔ اگر یہ ثبوت مشکل معلوم ہو تو کتاب کے پہلے مطالعہ میں اسے چھوڑ دیا جائے ۔ تفاعل ف (لا) مسلسل ہے اور ف (ا) = ف (ب) = صفر تو چونکہ ہر مسلسل تفاعل کی بند وقفہ میں ایک سب سے بڑی قیمت ع اور ایک سب سے چھوٹی قیمت ق ہوتی ہے (جو باب دوم میں ثابت کیا گیا ہے) مسئلہ کے ثبوت میں دو صورتیں ہیں :

صورت اول میں فرض کرو کہ ع = ق = صفر اس لیے ف (لا) تمام قیمتوں کے لیے صفر ہے اور فَ (لا) = صفر اور مسئلہ ثابت ہوا ۔

صورت دوم میں ع ≠ صفر تو متغیر کی کسی خاص قیمت لا کے لیے ف (لا) = ع اور اگر ھ کوئی مثبت مقدار ہو تو ف (لا + ھ) > ف (لا)

اور [ف (لا + ھ) − ف (لا)] / ھ > صفر

اور لا کی مثبت جانب سے انتہا میں فَ (لا) ≥ صفر

نیز ف (لا − ھ) > ف (لا)

اس لیے [ف (لا − ھ) − ف (لا)] / ھ > صفر

اب (−۱) سے ضرب دینے سے لا تساوات اُلٹ جاتی ہے ۔

اور [ف (لا − ھ) − ف (لا)] / −ھ < صفر

اس لیے لا کی منفی جانب سے انتہا میں فَ (لا) ≤ صفر

پس ف (لا) = صفر

رول کے مسئلہ کا نتیجہ صحیح :-

اگر ف (ا) = ف (ب) = مستقل مر تو ف (لا) متغیر لا کی کم از کم ایک قیمت کے لیے جو ا اور ب کے درمیان واقع ہے صفر ہوگا - اس مسئلہ کو ثابت کرنے کے لیے ف (لا) - مر پر غور کرو - یہ تفاعل رول کے مسئلہ کی شرائط کو پورا کرتا ہے اس لیے ف (لا) صفر ہوگا جہاں ا < لا < ب -

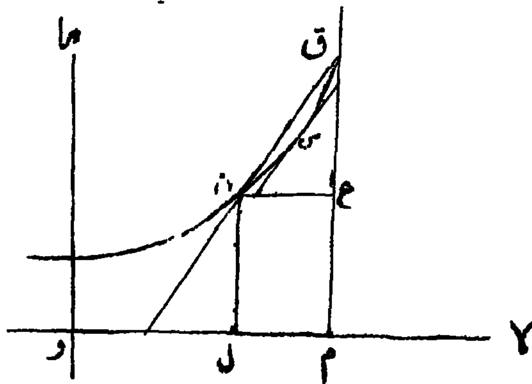
## ۲،۶ - اوسط قیمت کا مسئلہ :- رول کے مسئلہ سے

ایک اہم مسئلہ اخذ کیا جاتا ہے جس کو اوسط قیمت کے مسئلہ سے نامزد کرتے ہیں - یہ مسئلہ ہے کہ اگر ف (لا) اور ف (لا) مسلسل ہوں جبکہ ا < لا < ب تو ف (ب) - ف (ا) = (ب - ا) ف (لا) جہاں ا < لا < ب

ہندسی شکل سے ظاہر ہے کہ ما = ف (لا) کی ترسیم پر دو نقاط ن اور ق لیں جن کے محدد ہیں

[ا، ف (ا)] اور [ب، ف (ب)] تو $\frac{\text{ف (ب)} - \text{ف (ا)}}{\text{ب} - \text{ا}} = \frac{\text{ق م} - \text{ن ل}}{\text{م و} - \text{ل و}}$

$= \frac{\text{ق ع}}{\text{ن ع}} =$ مس (ق ن ع)



پس ہندسی الفاظ میں مسئلہ کو یوں بیان کر سکتے ہیں کہ وتر ن ق، قوس کے کسی درمیانی نقطہ پر مماس کے متوازی ہے۔

اس مسئلہ کو ثابت کرنے کے لیے تفاعل فا (لا) پر غور کرو جہاں

$$\text{فا}(\text{لا}) = \text{ف}(\text{لا}) - \text{ف}(\text{ا}) - \left\{ \frac{\text{ف}(\text{ب}) - \text{ف}(\text{ا})}{\text{ب} - \text{ا}} \right\} (\text{لا} - \text{ا})$$

تفاعل فا (لا) حدود ا اور ب کے درمیان مسلسل ہے اور اس کا تفرقی سر بھی مسلسل ہے۔

نیز ظاہر ہے کہ $\text{فا}(\text{ا}) = \text{ف}(\text{ا}) - \text{ف}(\text{ا}) - \left\{ \frac{\text{ف}(\text{ب}) - \text{ف}(\text{ا})}{\text{ب} - \text{ا}} \right\} (\text{ا} - \text{ا}) = \text{صفر}$

اور $\text{فا}(\text{ب}) = \text{ف}(\text{ب}) - \text{ب}(\text{ا}) - \left\{ \frac{\text{ف}(\text{ب}) - \text{ف}(\text{ا})}{\text{ب} - \text{ا}} \right\} (\text{ب} - \text{ا}) = \text{صفر}$

اس لیے تفاعل فا (لا) پر مسئلہ رول لگانے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$\text{فاَ}(\text{لا}_1) = ۰$ جہاں $\text{لا}_1$ وقفہ (ا، ب) میں مناسب نقطہ ہے۔

اب $\text{فاَ}(\text{لا}) = \text{فَ}(\text{لا}) - \frac{\text{ف}(\text{ب}) - \text{ف}(\text{ا})}{(\text{ب} - \text{ا})}$

$$\therefore \quad \text{فاَ}(\text{لا}_1) = \text{فَ}(\text{لا}_1) - \frac{\text{ف}(\text{ب}) - (\text{ف}(\text{ا})}{\text{ب} - \text{ا}} = \text{صفر}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{ف}(\text{ب}) - \text{ف}(\text{ا})}{\text{ب} - \text{ا}} = \text{فَ}(\text{لا}_1)$$

یعنی $\text{ف}(\text{ب}) - \text{ف}(\text{ا}) = (\text{ب} - \text{ا})\, \text{فَ}(\text{لا}_1)$ اور مسئلہ ثابت ہوا۔

**نتیجۂ صریح (۱)۔** چونکہ یہ مسئلہ بہت اہم ہے اس کی دو ذرا مختلف شکلیں بھی یہاں بیان کر دی جاتی ہیں۔

فرض کرو کہ $\text{ب} = \text{ا} + \text{ھ}$ اور $\text{لا}_1 = \text{ا} + \text{ط}\,\text{ھ}$ جہاں ط مناسب مثبت کسر واجب ہے

تو ف(ا + ھ) = ف(ا) + ھ فَ(ا + طھ)

نتیجۂ صریح (۲)- نیز اگر ا کی بجائے لا لکھیں اور ب کی بجائے لا + △ لا

تو ف(لا + △ لا) - ف(لا) = △ لا × فَ(لا + ط × △ لا)

مثال (۱) اگر ف(لا) = لا$^{۳}$ - ۴لا تو ف(لا) = ۰ اور فَ(لا) = ۰ سے لا کی قیمتیں نکال کر رول کے مسئلہ کی تصدیق کرو۔

ف(لا) = لا$^{۳}$ - ۴لا = لا(لا$^{۲}$ - ۴) = لا(لا - ۲)(لا + ۲)

∴ ف(لا) = ۰ جبکہ لا = ۲، ۰، -۲

اور فَ(لا) = ۳لا$^{۲}$ - ۴ = ۰ جبکہ لا = ± ۲/√۳

چونکہ ۲/√۳ نقاط ۲ اور صفر کے درمیان اور -۲/√۳ نقاط صفر اور -۲ کے درمیان واقع ہے۔ اس لیے رول کے مسئلہ کی تصدیق ہوتی ہے۔

(۲) لا کی وہ قیمتیں دریافت کرو جو ف(لا) = ۰ اور فَ(لا) = ۰ کو پورا کرتی ہیں اور اس سے رول کے مسئلہ کی تصدیق کرو۔

(ا) ف(لا) = لا$^{۳}$ - ۳لا

(ب) ف(لا) = ۶لا$^{۲}$ - لا$^{۳}$

(ج) ف(لا) = ا + ب لا + ج لا$^{۲}$

(د) ف(لا) = جب π لا - جم π لا

(ھ) ف(لا) = لا لوگ لا

(۳) بتاؤ کہ ذیل کے تفاعلوں پر رول کا مسئلہ استعمال ہو سکتا ہے یا نہیں۔ اپنے جواب کی وجہ بیان کرو۔

(ا) ف(لا) = مس لا اور لا = صفر اور π

(ب) (م + ۱)$^{۳}$ = لا$^{۲}$ میں م = صفر جبکہ لا = +۱، -۱

(۴) اگر ف(لا) = لا$^{۲}$ تو بتاؤ کہ لا = ۱ اور لا = ۲ کے درمیان کسی نقطہ پر مماس وتر کے متوازی ہے

اب ف(ب) - ف(ا) = (ب - ا) فَ(لا$_{۱}$)

∴ فَ (لاٖ) = $\frac{\text{ف(ب) - ف(ا)}}{\text{ب - ا}}$ = $\frac{\text{ف(۲) - ف(۱)}}{\text{۲ - ۱}}$ = $\frac{\text{۴ - ۱}}{\text{۱}}$ = ۳

∴ ۲ لاٖ = ۳　∴ لاٖ = $\frac{\text{۳}}{\text{۲}}$

(۵) ذیل کے تفاعلوں میں لاٖ کی قیمت معلوم کرو جو رشتہ ف (ب) = ف (ا) + (ب - ا) فَ (لاٖ) کو پورا کرے اور تصدیق کرو کہ لاٖ، ا اور ب کے درمیان واقع ہے۔

(ا) ف (لا) = $\frac{\text{لا}^{۳}}{\text{۳}}$　ب = ۲، ا = $\frac{\text{۳}}{\text{۲}}$

(ب) ف (لا) = $\sqrt{\text{لا}}$　ا = $\frac{\text{۱}}{\text{۴}}$، اور ب = $\frac{\text{۹}}{\text{۱۶}}$،

(ج) ف (لا) = قو$^{\text{لا}}$　ا = ۰ اور ب = ۱

(د) ف (لا) = لوگ (۱ + لا)　ا = ۰ اور ب = $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$

(۶) اگر ف (لا) = لا$^{۳}$ اور ا = ۴ اور ھ = ۱ تو اوسط مسئلہ میں ط کی قیمت معلوم کرو۔

ف (ا + ھ) = ف (ا) + ھ فَ (ا + طھ)

∴ (۴ + ۱)$^{۲}$ = ۴$^{۳}$ + ۱ × [۳ (۴ + ط × ۱)$^{۲}$]

∴ ۱۲۵ = ۶۴ + ۳ (۴ + ط)$^{۲}$

∴ (۴ + ط)$^{۲}$ = $\frac{\text{۶۱}}{\text{۳}}$

یا ط = $\sqrt{\frac{\text{۶۱}}{\text{۳}}}$ - ۴ = ۴٫۵۰۹۲۵ - ۴ = ۰٫۵۰۹۲۵

ط کی قیمت سے اس امر کی تصدیق ہوتی ہے کہ ط کسر واجب ہے۔

(۷) اگر ف (لا) = ۳ لا$^{۲}$ - ۴ لا + ۵ تو ط کی قیمت معلوم کرو جبکہ

(۱) ا = ۶ اور ھ = ۱

(۲) ا = ۱۲ اور ھ = ۴

(۸) اگر ف (لا) = ۲ لا$^{۳}$ - ۵ تو ط کی قیمت معلوم کرو جبکہ

(۱) ا = ۲ اور ھ = ۱/۳

(۲) ا = ۸ اور ھ = ۱

**۶۰۳ - اوسط مسئلہ کی توسیع** :- دفعۂ ماقبل میں دیے ہوئے اوسط کے مسئلہ کی توسیع ہو سکتی ہے۔ فرض کرو کہ ف (لا) کا دوسرا مشتق وجود رکھتا ہے اور مسلسل ہے تو سابقہ ترقیم کے مطابق فرض کرو کہ

فا (لا) = ف (لا) − ف (ا) − (لا − ا) فَ (ا) − ½ (لا − ا)² × [ف (ب) − ف (ا) − (ب − ا) فَ (ا)] ÷ [½ (ب − ا)²]

اب تفاعل فا (لا) حدود ا اور ب کے درمیان مسلسل ہے اور اس کا تفرقی سر بھی مسلسل ہے اور واضح ہے کہ فا (ا) = فا (ب) = ۰۔ اس لیے ضروری ہے کہ مسئلہ رول سے فاَ (لا۱) = ۰ جہاں

ا < لا۱ < ب، اب فاَ (لا) = فَ (لا) − فَ (ا) − (لا − ا) × [ف (ب) − ف (ا) − (ب − ا) فَ (ا)] ÷ [½ (ب − ا)²]

اس میں لا = ا درج کرنے سے ثابت ہوتا ہے کہ فاَ (ا) = ۰۔ اس لیے تفاعل فاَ (لا) پر بھی مسئلہ رول لگ سکتا ہے اور اس سے حاصل ہوتا ہے کہ

فاً (لا۲) = ۰ جہاں ا < لا۲ < لا۱ < ب فاً (لا) = فً (لا) − [ف (ب) − ف (ا) − (ب − ا) فَ (ا)] ÷ [½ (ب − ا)²]

اس لیے فاً (لا۲) = ۰ = فً (لا۲) − [ف (ب) − ف (ا) − (ب − ا) فَ (ا)] ÷ [½ (ب − ا)²]

سادہ کرنے سے

۰ = ½ (ب − ا)² فً (لا۲) − [ف (ب) − ف (ا) − (ب − ا) فَ (ا)]

یعنی ف (ب) = ف (ا) + (ب − ا) فَ (ا) + ½ (ب − ا)² فً (لا۲)

یہ اوسط مسئلہ کی دوسرے مشتق تک توسیع ہے۔ اگر ف (لا) کا ن-واں مشتق مسلسل ہو تو اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$\text{ف}(\text{ب}) = \text{ف}(\text{ا}) + (\text{ب}-\text{ا})\,\text{فَ}(\text{ا}) + \frac{(\text{ب}-\text{ا})^{۲}}{\underline{|۲}}\,\text{فً}(\text{ا}) + \frac{(\text{ب}-\text{ا})^{۳}}{\underline{|۳}}\,\text{فٌ}(\text{ا}) + \cdots + \frac{(\text{ب}-\text{ا})^{\text{ن}-۱}}{\underline{|\text{ن}-۱}}\,\text{ف}^{(\text{ن}-۱)}(\text{لا}) + \frac{(\text{ب}-\text{ا})^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}}\,\text{ف}^{(\text{ن})}(\text{لا}_{\text{ن}})$$

جہاں $\text{ا} < \text{لا}_{\text{ن}} < \text{لا}_{\text{ن}-۱} < \text{لا}_{\text{ن}-۲} < \cdots < \text{لا}_{۳} < \text{لا}_{۲} < \text{لا}_{۱} < \text{ب}$

یہ اوسط کا توسیع شدہ مسئلہ کہلاتا ہے۔

اس میں ب = لا + ا درج کریں تو

$$\text{ف}(\text{ا}+\text{لا}) = \text{ف}(\text{ا}) + \text{لا}\,\text{فَ}(\text{ا}) + \frac{\text{لا}^{۲}}{\underline{|۲}}\,\text{فً}(\text{ا}) + \cdots + \frac{\text{لا}^{\text{ن}-۱}}{\underline{|\text{ن}-۱}}\,\text{ف}^{\text{ن}-۱}(\text{ا}) + \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}}\,\text{ف}^{(\text{ن})}(\text{ا}+\text{طہ}\,\text{لا})$$

جہاں طہ کسر واجب ہے۔

یہ ٹیلر کا مسئلہ کہلاتا ہے کیونکہ ڈاکٹر بروک ٹیلر (۱۶۸۵ء - ۱۷۳۱ء) نے اس مسئلہ کو اپنی کتاب (Methodus Incrementorum) میں ۱۷۱۵ء میں شایع کیا تھا۔

اب لا متناہی سلسلہ $\text{ف}(\text{ا}) + \text{لا}\,\text{فَ}(\text{ا}) + \frac{\text{لا}^{۲}}{\underline{|۲}}\,\text{فً}(\text{ا}) + \cdots + \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}}\,\text{ف}^{\text{ن}}(\text{ا}) + \cdots$ پر غور کرو۔ پہلے باب میں بتایا گیا ہے کہ سلسلہ کے استدقاق کے لیے ضروری ہے کہ ن ویں رقم صفر کی طرف مائل ہو جبکہ $\text{ن} \to \infty$ لیکن یہ شرط کافی نہیں ہے۔ کافی شرط یہ ہے کہ ن رقموں کے بعد کی تمام رقموں کا مجموعہ صفر کی طرف مائل ہو جبکہ $\text{ن} \to \infty$، ن رقموں کے بعد کی تمام رقموں کے مجموعے کو باقی کہتے ہیں۔ مقابلہ سے ظاہر ہے یہ ٹیلر کے پھیلاؤ میں $\frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}}\,\text{ف}^{(\text{ن})}(\text{ا}+\text{طہ}\,\text{لا})$ باقی ہے، اور اگر یہ صفر کی طرف مائل ہو جبکہ $\text{ن} \to \infty$ تو لا انتہا سلسلہ مستدق ہے اور اس لیے تفاعل کو لا متناہی سلسلے میں پھیلایا جا سکتا ہے۔

پس $$\text{ف}(\text{ا}+\text{لا}) = \text{ف}(\text{ا}) + \text{لا}\,\text{فَ}(\text{ا}) + \cdots + \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}}\,\text{ف}^{(\text{ن})}(\text{ا}) + \cdots$$

اس کو ٹیلر کا پھیلاؤ کہتے ہیں اور یہ صرف ایسے تفاعلوں کے لیے درست ہے

جن کے لیے $\frac{لا^{ن}}{\underline{|ن}}$ ف$^{(ن)}$ (ا + لا ط) ← صفر جبکہ ن ← ∞، علم احصا میں یہ مسئلہ بہت اہم ہے اور اس لیے باقی پر اعلیٰ ریاضی دانوں نے غور کیا ہے اور اس کی دو خاص شکلیں لگرانج اور کوشی نے حاصل کی ہیں ۔اس کتاب میں صرف ایسے تفاعلوں کے پھیلاؤ پر غور کیا جائیگا جن کے لیے باقی صفر کی طرف مائل ہوتا ہے۔

ٹیلر کے پھیلاؤ میں ا = ۰ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$ف(لا) = ف(۰) + لا فَ(۰) + \dots + \frac{لا^{ن}}{\underline{|ن}} ف^{(ن)}(۰) + \dots$$

بشرطیکہ $\frac{لا^{ن}}{\underline{|ن}}$ ف$^{ن}$ (لا ط) ← ۰ جبکہ ن ← ∞

یہ پھیلاؤ سٹرلنگ (۱۶۹۲ء - ۱۷۷۰ء) نے حاصل کیا تھا لیکن اس نے شایع نہیں کیا۔ کولن میکلورن (۱۶۹۸ء - ۱۷۴۶ء) نے سب سے پہلے اسے اپنی کتاب (Treatise on Fluxions) میں ۱۷۴۲ء میں شایع کیا اور اس لیے یہ پھیلاؤ میکلورن کا پھیلاؤ کہلاتا ہے۔

مثال (۱) اگر ف(لا) = لا$^{۳}$ - ۴ لا$^{۲}$ + ۵ لا + ۷

تو ٹیلر کے مسئلہ کی مدد سے ف (لا + ۲) معلوم کرو۔

$$ف(۲ + لا) = ف(۲) + لا فَ(۲) + \frac{لا^{۲}}{\underline{|۲}} فً(۲) + \frac{لا^{۳}}{\underline{|۳}} فٌ(۲) + \dots$$

اب ف(۲) = ۲$^{۳}$ - ۴ × ۲$^{۲}$ + ۵ × ۲ + ۷ = ۹

فَ(لا) = ۳ لا$^{۲}$ - ۸ لا + ۵

∴ فَ(۲) = ۳ × ۲$^{۲}$ - ۸ × ۲ + ۵ = ۱

اور فً(لا) = ۶ لا - ۸ ∴ فً(۲) = ۱۲ - ۸ = ۴

اور فٌ(لا) = ۶ ∴ فٌ(۲) = ۶

اور ف$^{''''}$(لا) = صفر ∴ ف$^{''''}$(۲) = صفر

اور ظاہر ہے کہ چوتھے سے اعلیٰ رتبہ کے تمام مشتق صفر ہیں

اس لیے $\text{ف}\,(۲+\text{لا}) = ۹ + \text{لا} \times ۱ + \frac{\text{لا}^{۲}}{۲!}(۴) + \frac{\text{لا}^{۳}}{۳!}(۶) + \frac{\text{لا}^{۴}}{۴!}(۰) + \cdots\cdots$

$$= ۹ + \text{لا} + ۲\,\text{لا}^{۲} + \text{لا}^{۳}$$

(۳) $\text{و}^{\text{لا}}$ کو (لا − ۱) کی قوتوں میں پھیلاؤ۔

$$\text{ف}\,(۱+\text{لا}-۱) = \text{و}^{۱+(\text{لا}-۱)}$$

$$= \text{ف}(۱) + (\text{لا}-۱)\,\text{ف}'(۱) + \frac{(\text{لا}-۱)^{۲}}{۲!}\,\text{ف}''(۱) + \cdots$$

اب $\text{ف}\,(\text{لا}) = \text{و}^{\text{لا}} = \text{ف}'(\text{لا}) = \text{ف}''(\text{لا}) = \cdots\cdots$

$\therefore\ \text{ف}\,(۱) = \text{ف}'(۱) = \text{ف}''(۱) = \cdots\cdots = \text{و}$

$\therefore\ \text{و}^{\text{لا}} = \text{و} + (\text{لا}-۱)\,\text{و} + \frac{(\text{لا}-۱)^{۲}}{۲!}\,\text{و} + \cdots\cdots$

$$= \text{و}\left[۱ + (\text{لا}-۱) + \frac{(\text{لا}-۱)^{۲}}{۲!} + \frac{(\text{لا}-۱)^{۳}}{۳!} + \cdots\cdots\right]$$

باقی $= \frac{(\text{لا}-۱)^{\text{ن}}}{\text{ن}!}\,\text{و}^{۱+\text{ط}(\text{لا}-۱)}$ اور یہ لا کی تمام قیمتوں کے لیے صفر کی طرف مائل ہوتا ہے چونکہ $\text{ن}!$ نسب نما میں ہے اس لیے پھیلاؤ درست ہے۔

(۳) $۳\,\text{لا}^{۳} - ۵\,\text{لا}^{۲} + ۸\,\text{لا} - ۵$ کو (لا − ۲) کی قوتوں میں پھیلاؤ۔

(۴) لوک (ھ + لا) کو لا کی قوتوں میں پھیلاؤ اور پھر ھ = ۱ رکھ کر لوک (۱ + لا) کا پھیلاؤ حاصل کرو۔

(۵) اگر $\text{ف}\,(\text{لا}) = ۵\,\text{لا}^{۳} - ۴\,\text{لا}^{۲} + ۱۸\,\text{لا} - ۷$ تو ف (لا − ۲) کی قیمت معلوم کرو۔

(۶) ف (لا + ۳) معلوم کرو جبکہ $\text{ف}\,(\text{لا}) = \text{لا}^{۳} - ۴\,\text{لا} + ۷$

(۷) لوک لا کو (لا − ۱) کی قوتوں میں پھیلاؤ۔

(۸) جب (لا + ما) کو ما کی قوتوں میں پھیلاؤ اور اس میں لا = صفر اور لا = $\frac{\pi}{۲}$ رکھ کر جب لا، جم لا کا پھیلاؤ حاصل کرو۔ ان پھیلاؤ سے تصدیق کرو کہ جب (لا + ما) = جب لا جم ما + جم لا جب ما

(۹) $\frac{۱}{\text{لا}}$ کو (لا − ۱) کی قوتوں میں پھیلاؤ۔

(۱۰) و^(لا+ھ) اور (لا + ھ)^م کو لا کی قوتوں میں پھیلاؤ۔

(۱۱) جب لا کو میکلورن کے مسئلہ سے پھیلاؤ

جب لا = ف (لا) = ف (۰) + لا فَ (۰) + لا^۲/۲! فً (۰) + .... + لا^ن/ن! ف^(ن) (ط لا)

اب فَ (لا) = جم لا = جب (لا + π/۲)

اور فً (لا) = جم (لا + π/۲) = جب (لا + ۲ × π/۲)

..... ف^(ن) (لا) = جب (لا + ن × π/۲)

∴ جب لا = ۰ + لا × جب π/۲ + لا^۲/۲! × جب ۲π/۲

+ لا^۳/۳! × جب ۳π/۲ + ... + لا^ن/ن! جب (ط لا + نπ/۲)

اب لا^ن/ن! جب (ط لا + نπ/۲) پر غور کرو جب (ط لا + نπ/۲) تمام قیمتوں کے لیے ایک سے کم ہے اور لا^ن اور ن! دونوں لاتناہی کی طرف مائل ہیں اگر ن ← ∞ لیکن طالب علم یہ مان لے کہ ن! بمقابلہ لا^ن بہت بڑا لاتناہی ہے اس لیے لا^ن/ن! ← صفر جبکہ ن ← ∞ متغیر لا کی تمام قیمتوں کے لیے

پس جب لا = لا − لا^۳/۳! + لا^۵/۵! − لا^۷/۷! + ......

(۱۲) ذیل کے تفاعلوں کو میکلورن کے مسئلہ سے پھیلاؤ

(ا) و^لا (ب) لوک (۱+لا)

(ج) جب^(-۱) لا (د) مس^(-۱) لا

(ھ) جم لا (و) مس لا

(ز) قط لا

(۱۳) ثابت کرو کہ و^(جب^(-۱) لا) = ۱ + لا + لا^۲/۲! + ۲لا^۳/۳! + ۵لا^۴/۴! + .....

(۱۴) لوک (۱ - لا + لا^۲) = - لا + لا^۲/۲ + ۲لا^۳/۳ + لا^۴/۴ - لا^۵/۵ .....

(۱۵) لوجب لا = لا + لا^۲ + ۲لا^۳/|۳ - ۲^۲لا^۵/|۵ - ۲^۳لا^۶/|۶ - ۲^۳لا^۷/|۷ ......

(۱۶) لو^(لاجم ھ) جم (لا جب ھ) = ۱ + لا جم ھ + لا^۲/|۲ جم ۲ھ + لا^۳/|۳ جم ۳ھ + ...

## ۴ر۶- ائیلر کے پھیلاؤ کی مدد سے اعظم اور اقل قیمتوں کا مسئلہ :—

تفاعل ف (لا) کو کسی نقطہ لا = ا پر اعظم اس وقت کہتے ہیں جبکہ اس نقطہ پر تفاعل کی قیمت دونوں جانب قریب کے نقطوں پر کی قیمت سے زیادہ ہو یا تحلیلی زبان میں اسے یوں بیان کرینگے کہ

ف (ا) - ف (ا + ھ) > ۰
اور ف (ا) - ف (ا - ھ) > ۰
جبکہ ھ کوئی کافی چھوٹی مقدار ہے۔

اسی طرح تفاعل ف (لا) کو لا = ا پر اقل کہینگے بشرطیکہ

ف (ا) - ف (ا + ھ) < ۰
ف (ا) - ف (ا - ھ) < ۰
جبکہ ھ کافی چھوٹی مقدار ہے۔

اب ف (ا + ھ) = ف (ا) + ھ فَ (ا) + ھ^۲/|۲ فً (ا) + .....
+ ھ^ن/|ن ف^(ن) (ا + طھ)

اس لیے ف (ا) - ف (ا + ھ) = - ھ فَ (ا) - ھ^۲/|۲ فً (ا) - .....
- ھ^ن/|ن ف^(ن) (ا + طھ) ...(۱)

اس میں ھ کی علامت بدلنے سے

ف (ا) - ف (ا - ھ) = ھ فَ (ا) - ھ^۲/|۲ فً (ا) .....
+ (-۱)^ن ھ^ن/|ن ف^(ن) (ا + طھ) .... (۲)

مساوات (۱) اور (۲) کی بائیں جانب کے جملوں کی قیمت ھ کو کافی چھوٹا لینے سے پہلی رقم پر منحصر کی جا سکتی ہے۔ اب اعظم اور اقل نقطوں کے لیے ضروری ہے کہ ف (ار)۔ ف (ار + ھ) اور ف (ار)۔ ف (ار ۔ ھ) کی علامت ایک ہی ہو اعظم نقطوں کے لیے مثبت اور اقل نقطوں کے لیے منفی۔ اس لیے ضروری ہے کہ مساوات (۱) اور (۲) کے بائیں جانب کی پہلی رقم صفر ہو کیونکہ یہ مختلف العلامت ہے۔ یعنی اعظم اور اقل نقطوں کے لیے ضروری شرط ہے کہ فَ (ار) = ۰

اب ف (ار)۔ ف (ار + ھ) = ۔ $\frac{ھ^۲}{\underline{|۲}}$ فً (ار) .....

اور ف (ار) ۔ ف (ار ۔ ھ) = ۔ $\frac{ھ^۲}{\underline{|۲}}$ فً (ار) ......

ان مساواتوں میں بائیں جانب کی علامت ایک ہی ہے اعظم نقطوں کے لیے ۔ $\frac{ھ^۲}{\underline{|۲}}$ فً (ار) کو مثبت ہونا چاہیے یعنی فً (ار) کو منفی ہونا چاہیے۔ اور اقل نقطوں کے لیے فً (ار) کو مثبت ہونا چاہیے۔ اگر فً (ار) بھی صفر ہو تو اعظم اور اقل نقطوں کے لیے فًَ (ار) کو بھی صفر ہونا چاہیے اور اعظم کے لیے فً‌ً (ار) منفی اور اقل کے لیے فً‌ً (ار) مثبت۔

پس عام صورت میں اگر

ف (ار) = فَ (ار) = . . ف$^{(ر)}$ (ار) = ۰ اور ف$^{(ر+۱)}$ (ار) ≠ صفر

اور ر طاق ہو تو نقطہ لا = ار اعظم یا اقل ہوگا جبکہ ف$^{(ر+۱)}$ (ار) ≷ صفر لیکن اگر ر جفت ہو تو لا = ار نقطۂ انعطاف ہوگا۔

مثال (۱) ف (لا) = قولا + ۲ جم لا + قو‌۔لا کی اعظم اور اقل قیمتیں معلوم کرو۔

فَ (لا) = قولا ۔ ۲ جب لا ۔ قو‌۔لا = صفر جبکہ لا = صفر

اور فً (لا) = قولا ۔ ۲ جم لا + قو‌۔لا = ۱ ۔ ۲ + ۱ = صفر

اور ف″ (لا) = قو$^{لا}$ + ۲ جب لا - قو$^{-لا}$ = صفر جبکہ لا = صفر

اور ف‴ (لا) = قو$^{لا}$ + ۲ جم لا + قو$^{-لا}$ = ۴

اس لیے لا = صفر تفاعل ف (لا) کا اقل نقطہ ہے -

(۲) ذیل کے تفاعلوں کی اعظم اور اقل قیمت دریافت کرو:-

(ا) لا$^{۳}$ - ۹ لا$^{۲}$ + ۲۴ لا - ۷

(ب) لا$^{۴}$ - ۴ لا$^{۳}$ + ۵

(ج) لا$^{۳}$ + ۳ لا$^{۲}$ + ۳ لا

(د) لا$^{۲}$ (لا - ۲)$^{۲}$

(ہ) جب لا (۱ + جم لا)

(و) لا / لوک لا

(ز) لوک جم لا

(ح) ۳ جب لا + ۲ جم ۲ لا

(ط) لا / (۱ + لا مس لا)

(ی) ۳ لا$^{۵}$ - ۱۲۵ لا$^{۳}$ + -۲۱۶ لا

(ک) لا$^{۴}$ + ۴

(ل) لا$^{۵}$ = ۱

(م) لا$^{لا}$

(ن) جب$^{۳}$ لا جم لا

(ص) (لا - ۲)$^{۳}$ + ۱

**۶،۵ - غیر معین شکلیں :-** پہلے باب میں بتایا گیا ہے کہ غیر معین شکل مثلاً صفر/صفر کی قیمت کے کیا معنی ہیں۔ حسابی عمل کی حد تک صفر/صفر کے کوئی معنی نہیں ہیں کیونکہ کسی ہندسہ کو صفر سے تقسیم نہیں کیا جا سکتا۔ غیر معین شکل کی قیمت سے در اصل انتہا مراد ہے یعنی اگر ف (لا) = فا(لا) = ۰

غیر معین شکلیں $\dfrac{\text{ف (لا)}}{\text{فا (لا)}}$ نہا لا ← ا سے مراد ہے کی قیمت جبکہ لا = ا تو $\dfrac{\text{ف (لا)}}{\text{فا (لا)}}$ بہت قسم کی ہوتی ہیں لیکن ان میں سب سے اہم $\dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ والی شکل ہے اور ہم اسی پر سب سے پہلے غور کرینگے۔

۱۵ء۲۔ $\dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ :۔ اگر ف (ا) = فا (ا) = ۰

تو نہا لا ← ا $\dfrac{\text{ف (لا)}}{\text{فا (لا)}}$ کی قیمت مطلوب ہے۔

فرض کرو کہ ھ بہت چھوٹی تعداد ہے تب اُیلر کے مسئلہ سے

$$\text{ف (ا + ھ)} = \text{ف (ا)} + \text{ھ ف}'\text{(ا)} + \frac{\text{ھ}^2}{\text{۲!}}\,\text{ف}''\text{(ا + ط}_1\text{ھ)}$$

اور $\text{فا (ا + ھ)} = \text{فا (ا)} + \text{ھ فا}'\text{(ا)} + \dfrac{\text{ھ}^2}{\text{۲!}}\,\text{فا}''\text{(ا + ط}_2\text{ھ)}$

اب

$$\text{نہا}_{\text{لا} \leftarrow \text{ا}}\ \frac{\text{ف (لا)}}{\text{فا (لا)}} = \text{نہا}_{\text{ھ} \leftarrow \text{صفر}}\ \frac{\text{ف (ا + ھ)}}{\text{فا (ا + ھ)}}$$

$$= \text{نہا}_{\text{ھ} \leftarrow \text{۰}}\ \frac{\text{ف(ا)} + \text{ھ ف}'\text{(ا)} + \frac{\text{ھ}^2}{\text{۲!}}\text{ف}''\text{(ا + ط}_1\text{ھ)}}{\text{فا(ا)} + \text{ھ فا}'\text{(ا)} + \frac{\text{ھ}^2}{\text{۲!}}\text{فا}''\text{(ا + ط}_2\text{ھ)}}$$

$$= \text{نہا}_{\text{ھ} \leftarrow \text{۰}}\ \frac{\text{ھ ف}'\text{(ا)} + \frac{\text{ھ}^2}{\text{۲!}}\text{ف}''\text{(ا + ط}_1\text{ھ)}}{\text{ھ فا}'\text{(ا)} + \frac{\text{ھ}^2}{\text{۲!}}\text{فا}''\text{(ا + ط}_2\text{ھ)}}$$

چونکہ ف (ا) = فا (ا) = ۰

اور چونکہ ھ ≠ صفر اس لیے ھ سے تقسیم کر سکتے ہیں

$$= \text{نہا}_{\text{ھ} \leftarrow \text{۰}}\ \frac{\text{ف}'\text{(ا)} + \frac{\text{ھ}}{\text{۲}}\text{ف}''\text{(ا + ط}_1\text{ھ)}}{\text{فا}'\text{(ا)} + \frac{\text{ھ}}{\text{۲}}\text{فا}''\text{(ا + ط}_2\text{ھ)}}$$

$$= \frac{\text{ف}'\text{(ا)}}{\text{فا}'\text{(ا)}}$$ بشرطیکہ ف'' (ا + ط₁ھ)

اور $\text{فاَ}\ (\text{ا} + \text{طہ ھ})$ محدود ہوں جو شرط اکثر سوالات میں پوری ہوتی ہے ۔

اس لیے ثابت ہوا کہ $\underset{\text{لا} \to \text{ا}}{\text{نہا}} \dfrac{\text{ف}\ (\text{لا})}{\text{فا}\ (\text{لا})} = \dfrac{\text{فَ}\ (\text{ا})}{\text{فاَ}\ (\text{ا})}$

اگر $\text{فَ}\ (\text{ا}) = \text{فاَ}\ (\text{ا}) =$ صفر تو ٹیلر کے پھیلاؤ کو تیسرے تفرق تک لینے سے ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$\underset{\text{لا} \to \text{ا}}{\text{نہا}} \frac{\text{ف}\ (\text{لا})}{\text{فا}\ (\text{لا})} = \frac{\text{فً}\ (\text{ا})}{\text{فاً}\ (\text{ا})}$$ وغیرہ، وغیرہ ۔

یعنی شمارکنندہ اور نسب نما کو علٰحدہ علٰحدہ تفرق کر کے $\text{لا} = \text{ا}$ درج کرنے کے عمل کو اُس وقت تک جاری رکھا جائے جب تک ان میں سے کم از کم ایک تفاعل کے مشتق کی قیمت صفر نہ ہو ۔

مثال (۱) $\underset{\text{لا} \to ۲}{\text{نہا}} \dfrac{\text{لا}^۲ - ۴}{\text{لا}^۲ + \text{لا} - ۶}$ کی قیمت دریافت کرو ۔

$$\underset{\text{لا} \to ۲}{\text{نہا}} \frac{\text{لا}^۲ - ۴}{\text{لا}^۲ + \text{لا} - ۶} = \underset{\text{لا} \to ۲}{\text{نہا}} \frac{۲\,\text{لا}}{۲\,\text{لا} + ۱} = \frac{۴}{۵}$$

(۲) $\underset{\text{لا} \to ۰}{\text{نہا}} \dfrac{\text{لا}^۳}{\text{جب لا} - \text{لا}}$ کی قیمت معلوم کرو ۔

اب $\underset{\text{لا} \to ۰}{\text{نہا}} \dfrac{\text{لا}^۳}{\text{جب لا} - \text{لا}} = \underset{\text{لا} \to ۰}{\text{نہا}} \dfrac{۳\,\text{لا}^۲}{\text{جم لا} - ۱}$ یہ بھی $\dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ کی شکل ہے

$$\therefore \quad = \underset{\text{لا} \to ۰}{\text{نہا}} \frac{۶\,\text{لا}}{-\text{جب لا}}$$

$$= \underset{\text{لا} \to ۰}{\text{نہا}} \frac{۶}{-\text{جم لا}} = -۶$$

(۳) ذیل کی قیمتیں محسوب کرو :-

(ا) $\underset{\text{لا} = \frac{۱}{۲}}{\text{نہا}} \dfrac{۶\,\text{لا}^۲ - ۵\,\text{لا} + ۱}{۸\,\text{لا}^۲ - ۲\,\text{لا} - ۱}$

(ب) $\underset{لا \to ا}{نہا} \dfrac{لا - ا}{لا^{ن} - ا^{ن}}$

(ج) $\underset{لا \to ۰}{نہا} \dfrac{لا\, و^{لا^{۳}} - لا}{۱ - جم\, ۲لا}$

(د) $\underset{لا \to ۰}{نہا} \dfrac{(۲ - لا^{۲})\, جب\, لا - ۲\, لا\, جم\, لا}{لا^{۳}}$

(ه) $\underset{لا \to ۲}{نہا} \dfrac{\sqrt{۱۶لا - لا^{۴}} - ۲ \times \sqrt[۳]{۴\, لا}}{۲ - \sqrt[۴]{۲\, لا^{۳}}}$

(و) $\underset{ط \to ۰}{نہا} \dfrac{(۱ - جم\, ط)^{۲}}{ط^{۴}}$

(ز) $\underset{ط \to ۰}{نہا} \dfrac{جب^{۳}\, ط}{ط^{۳}}$

(ح) $\underset{ط \to ۰}{نہا} \dfrac{مس\, ط + قط\, ط - ۱}{مس\, ط - قط\, ط + ۱}$

(ط) $\underset{ا \to \frac{\pi}{۲}}{نہا} \dfrac{لوک\, جب\, ا}{(\pi - ۲ا)^{۲}}$

(ی) $\underset{لا \to ۰}{نہا} \dfrac{ا^{لا} - ب^{لا}}{لا}$

(ک) $\underset{لا \to ۳}{نہا} \dfrac{(و^{لا} - و^{۳})^{۳}}{(لا - ۶)\, و^{لا} + لا\, و^{۳}}$

(ل) $\underset{ط \to ۰}{نہا} \dfrac{مس\, ط - جب\, ط}{جب^{۳}\, ط}$

(م) $\underset{ا \to ا}{نہا} \dfrac{ا\, ا - ا^{۲}}{ا^{۴} - ۲\, ا^{۳}\, ا + ۲\, ا\, ا^{۳} - ا^{۴}}$

(ن) $\underset{ط \to ۰}{نہا} \dfrac{جب\, ط - ط}{مس\, ط - ط}$

۲۵ر۶ - $\frac{\text{لاتناہی}}{\text{لاتناہی}}$ : اگر لا ← ب کے لیے ف (لا) ← ∞ اور فا (لا) ← ∞ تو $\underset{\text{لا}\to\text{ب}}{\text{نہا}} \frac{\text{ف (لا)}}{\text{فا (لا)}}$ کی قیمت مطلوب ہے۔ اس صورت میں بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ

$\underset{\text{لا}\to\text{ب}}{\text{نہا}} \frac{\text{ف (لا)}}{\text{فا (لا)}} = \underset{\text{لا}\to\text{ب}}{\text{نہا}} \frac{\text{فَ (لا)}}{\text{فاَ (لا)}}$ لیکن اس کا صحیح ثبوت ذرا مشکل ہے اور اس کتاب میں نہیں دیا جائیگا۔ اس مسئلہ کو صحیح مان کر سوالات میں استعمال کیا جا سکتا ہے۔ بعض صورتوں میں لکھ سکتے ہیں کہ $\underset{\text{لا}\to\text{ب}}{\text{نہا}} \frac{\text{ف (لا)}}{\text{فا (لا)}}$ $= \underset{\text{لا}\to\text{ب}}{\text{نہا}} \frac{\frac{1}{\text{فا (لا)}}}{\frac{1}{\text{ف (لا)}}}$ جو $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ والی غیر معین شکل ہے اور اس کی قیمت سابقہ دفعہ سے نکالی جا سکتی ہے۔

غیر معین شکل لاتناہی × صفر اور لاتناہی − لاتناہی کو مذکورہ بالا $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ یا $\frac{\text{لاتناہی}}{\text{لاتناہی}}$ والی شکل میں بہ آسانی تبدیل کیا جا سکتا ہے جیسا کہ مثالوں سے واضح ہوگا۔ نیز غیر معین شکلیں $(\text{صفر})^{\text{صفر}}$ $(\text{لاتناہی})^{\text{صفر}}$ اور $(۱)^{\text{لاتناہی}}$ لوکارتم لینے سے صفر × لاتناہی کی شکل میں تبدیل کی جا سکتی ہیں اور مثالوں سے ان کی قیمت نکالنے کا طریقہ واضح کیا جائیگا۔

مثال (۱) $\underset{\text{لا}\to ۰}{\text{نہا}} \frac{\text{لوک لا}}{\text{قم لا}}$ دریافت کرو۔ یہ $\frac{\text{لاتناہی}}{\text{لاتناہی}}$ کی غیر معین شکل ہے اور اسے $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ کی شکل میں آسانی سے بیان نہیں کیا جا سکتا۔

$$\underset{\text{لا}\to ۰}{\text{نہا}} \frac{\text{لوک لا}}{\text{قم لا}} = \underset{\text{لا}\to ۰}{\text{نہا}} \frac{\frac{1}{\text{لا}}}{-\text{قم لا مم لا}} = \underset{\text{لا}\to ۰}{\text{نہا}} \frac{\text{جب}^2\text{ لا}}{\text{لا جم لا}}$$

جو $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ والی غیر معین شکل ہے۔ اس لیے $= \underset{\text{لا}\to ۰}{\text{نہا}} \frac{\text{۲ جب لا جم لا}}{\text{جم لا} - \text{لا جب لا}} = $ صفر

مثال (۲) $\underset{\text{ط}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{مم ط}}{\text{مم ۳ط}}$ کی قیمت دریافت کرو۔ یہ $\frac{\text{لا تناہی}}{\text{لا تناہی}}$ کی غیر معین شکل ہے لیکن اس کو $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ والی شکل میں بہ آسانی تبدیل کیا جا سکتا ہے۔

$$\underset{\text{ط}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{مم ط}}{\text{مم ۳ط}} = \underset{\text{ط}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{مس ۳ط}}{\text{مس ط}}$$

$$= \underset{\text{ط}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{۳ قط}^2\text{ ۳ط}}{\text{قط}^2\text{ ط}} = \frac{1\times 3}{1} = 3$$

ذیل کی قیمت محسوب کرو۔

(۳) $\underset{\text{لا}\to\infty}{\text{نہا}} \frac{\text{لا}^3}{\text{و}^{\text{لا}}}$

(۴) $\underset{\text{لا}\to\infty}{\text{نہا}} \frac{\text{لوک لا}}{\text{لا}^{\text{ن}}}$ (۵) $\underset{\text{لا}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{مم لا}}{\text{لوک لا}}$

(۶) $\underset{\text{ا}=\frac{\pi}{2}}{\text{نہا}} \frac{\text{مس ۳ا}}{\text{مس ۵ا}}$ (۷) $\underset{\text{لا}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{لوک لا}}{\text{مم لا}}$

(۸) $\underset{\text{لا}\to 0}{\text{نہا}}$ جب لا قم ۳لا کی قیمت دریافت کرو۔ یہ صفر × لا تناہی کی شکل ہے۔

$\underset{\text{لا}\to 0}{\text{نہا}}$ جب لا قم ۳لا $= \underset{\text{لا}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{جب لا}}{\text{جب ۳لا}}$ جو $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ والی شکل ہے۔

$$= \underset{\text{لا}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{جم لا}}{\text{۳ جم لا}} = \frac{1}{3}$$

(۹) $\underset{\text{ط}\to\frac{\pi}{2}}{\text{نہا}}$ (مس ط ـ قط ط) کی قیمت دریافت کرو۔ یہ $\infty - \infty$ کی غیر معین شکل ہے۔

$\underset{\text{ط}\to\frac{\pi}{2}}{\text{نہا}}$ (مس ط ـ قط ط) $= \underset{\text{ط}\to\frac{\pi}{2}}{\text{نہا}} \frac{\text{جب ط} - 1}{\text{جم ط}}$ ، یہ $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ہے۔

$$= \text{نہا}_{\text{ط}\to\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جم ط}}{-\text{جب ط}} = \frac{۰}{-۱} = \text{صفر}$$

ذیل کی قیمتیں محسوب کرو :-

(۱۰) $\text{نہا}_{\text{لا}\to ۲} (۲-\text{لا})\ \text{مس}\ \frac{\pi\,\text{لا}}{۴}$

(۱۱) $\text{نہا}_{\text{لا}\to ۱} \frac{\text{لوک}\ (\text{لا}-۱) + \text{مس}\ \frac{\pi\,\text{لا}}{۲}}{\text{مم}\ \pi\ \text{لا}}$

(۱۲) $\text{نہا}_{\text{لا}\to\frac{\pi}{2}} (۱ - \text{جب لا})\ \text{مس لا}$

(۱۳) $\text{نہا}_{\text{لا}\to ۰} \text{قم}^{۲}\ \text{لا} - \frac{۱}{\text{لا}^{۲}}$

(۱۴) $\text{نہا}_{\text{لا}\to\infty} \text{لا لوک}\ (۱ + \frac{۱}{\text{لا}})$

(۱۵) $\text{نہا}_{\text{لا}\to\frac{\pi}{2}} (\text{قط لا} - \frac{۱}{۱-\text{جب لا}})$

(۱۶) $\text{نہا}_{\text{ط}\to ۰} \left[\frac{\pi}{۲\,\text{ط}} - \frac{\pi}{\text{ط}\ (\text{و}^{\pi\,\text{ط}}+۱)}\right]$

(۱۷) $\text{نہا}_{\text{لا}\to ۰} \text{لا}^{۴}\ \text{لوک لا}$

(۱۸) $\text{نہا}_{\text{ما}\to ۲} \left[\frac{۴}{\text{ما}^{۲}-۴} - \frac{۱}{\text{ما}-۲}\right]$

(۱۹) $\text{نہا}_{\text{لا}\to ۱} \left[\frac{۱}{\text{لوک لا}} - \frac{\text{لا}}{\text{لوک لا}}\right]$

(۲۰) $(۱-\text{لا})^{۱-\text{لا}}$ کی قیمت محسوب کرو جبکہ لا = ۱ یہ صفر$^{\text{صفر}}$ والی غیر معین شکل اختیار کرتی ہے۔

فرض کرو کہ $\text{ما} = \text{نہا}_{\text{لا}\to ۱} (۱-\text{لا})^{۱-\text{لا}}$

لوکارتم لینے سے $\text{لوک ما} = \text{نہا}_{\text{لا}\to ۱} (۱-\text{لا})\ \text{لوک}(۱-\text{لا})$ یہ صفر × لاتناہی والی شکل ہے

$$= \text{نہا}_{\text{لا}\to ۱} \frac{\text{لوک}(۱-\text{لا})}{\frac{۱}{۱-\text{لا}}}$$

$$= \text{نہا}_{\text{لا}\to ۱} \frac{\frac{-۱}{۱-\text{لا}}}{\frac{۱}{(۱-\text{لا})^{۲}}} = \text{نہا}_{\text{لا}\to ۱} -(۱-\text{لا})$$

$$= \text{صفر}$$

$$\therefore \text{ما} = ۱ = \text{نہا}_{\text{لا}\to ۱} (۱-\text{لا})^{۱-\text{لا}}$$

(۲۱) $\text{نہا}_{\text{ن}\to\infty} \left(۱ + \frac{۱}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}$ کی قیمت محسوب کرو :-

فرض کرو کہ $\text{لا} = \text{نہا}_{\text{ن}\to\infty} \left(۱ + \frac{۱}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}$

تو $\text{لوک لا} = \text{نہا}_{\text{ن}\to\infty} \text{ن}\ \text{لوک} \left(۱ + \frac{۱}{\text{ن}}\right)$

$$= \text{نہا}_{\text{ن}\to\infty} \frac{\text{لوک}\left(۱+\frac{۱}{\text{ن}}\right)}{\frac{۱}{\text{ن}}} = \text{نہا}_{\text{ن}\to\infty} \frac{\frac{۱}{۱+\frac{۱}{\text{ن}}} \times \left(-\frac{۱}{\text{ن}^{۲}}\right)}{-\frac{۱}{\text{ن}^{۲}}}$$

$$= \text{نہا}_{\text{ن}\to\infty} \frac{۱}{۱+\frac{۱}{\text{ن}}} = ۱$$

$$\therefore \text{لا} = \text{قو}^{۱} = \text{نہا}_{\text{ن}\to\infty} \left(۱+\frac{۱}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}$$

(۲۲) $\text{نہا}_{\text{ط}\to\frac{\pi}{۲}} (\text{مس ط})^{\text{جم ط}}$ کی قیمت دریافت کرو :-

فرض کرو کہ $\text{ما} = \text{نہا}_{\text{ط}\to\frac{\pi}{۲}} (\text{مس ط})^{\text{جم ط}}$

تو $\text{لوک ما} = \text{نہا}_{\text{ط}\to\frac{\pi}{۲}} \text{جم ط} \times \text{لوک}(\text{مس ط}) = \text{نہا}_{\text{ط}\to\frac{\pi}{۲}} \frac{\text{لوک مس ط}}{\text{قط ط}}$

$$= \text{نہا}_{\text{ط}\to\frac{\pi}{۲}} \frac{\frac{۱}{\text{مس ط}} \times \text{قط}^{۲}\text{ط}}{\text{قط ط مس ط}} = \text{نہا}_{\text{ط}\to\frac{\pi}{۲}} \frac{\text{قط ط}}{\text{مس}^{۲}\text{ط}}$$

$$= \underset{\text{طہ} \to \frac{\pi}{2}}{\text{نہا}} \frac{\text{جم طہ}}{\text{جب}^2\,\text{طہ}} = \text{صفر}$$

$$\therefore \text{ما} = 1 = \underset{\text{طہ} \to \frac{\pi}{2}}{\text{نہا}} (\text{مس طہ})^{\text{جم طہ}}$$

(۲۳) $\underset{\text{لا} \to 0}{\text{نہا}} (1 + \text{لا})^{\frac{1}{\text{لا}}}$ (۲۴) $\underset{\text{لا} \to 0}{\text{نہا}} (\text{جم لا})^{\text{جب لا}}$

(۲۵) $\underset{\text{ما} \to 1}{\text{نہا}} \text{ما}^{\frac{1}{1-\text{ما}}}$ (۲۶) $\underset{\text{طہ} \to \frac{\pi}{2}}{\text{نہا}} (\text{جب طہ})^{\text{قط طہ}}$

(۲۷) $\underset{\text{لا} \to 0}{\text{نہا}} (1 + 2\,\text{لا})^{\frac{1}{\text{لا}}}$ (۲۸) $\underset{\text{لا} \to 0}{\text{نہا}} \left(\frac{1}{\text{لا}}\right)^{\text{جب لا}}$

(۲۹) $\underset{\text{لا} \to 1}{\text{نہا}} (2 - \text{لا})^{\text{مس} \frac{\pi\,\text{لا}}{2}}$ (۳۰) $\underset{\text{لا} \to \text{و}}{\text{نہا}} (\text{لوک لا})^{\frac{1}{1-\text{لوک لا}}}$

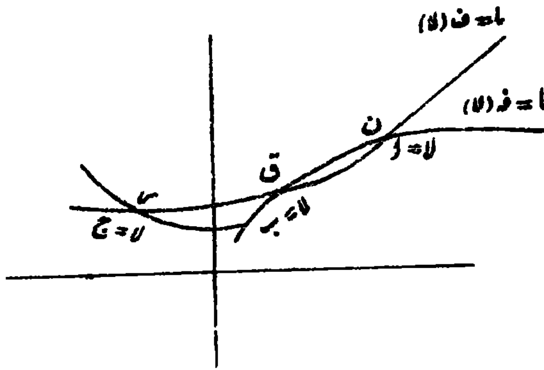
(۳۱) $\underset{\text{لا} \to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{مس لا} - \text{جب لا}}{\text{لا}^3}$ (۳۲) $\underset{\text{طہ} \to 0}{\text{نہا}} (1 + \text{جب طہ})^{\text{جم طہ}}$

(۳۳) $\underset{\text{طہ} \to 0}{\text{نہا}} (\text{جم م طہ})^{\frac{\text{ن}}{\text{طہ}^2}}$

**۷۶۔ تماس** :- کسی منحنی کے مماس سے وہ خط مراد ہے جو منحنی کے دو نقطوں میں سے گزرے جبکہ انتہا میں نقطے ایک دوسرے پر منطبق ہو جائیں۔ پس مماس اور منحنی میں دو منطبق نقطے مشترک ہوتے ہیں اور خط کی اس حالت کو مس کرنا کہتے ہیں یا یوں بھی بیان کرتے ہیں کہ خط منحنی کے ساتھ پہلے رتبہ کا تماس رکھتا ہے۔ اسی طرح اگر ایک منحنی دوسرے منحنی کو دو منطبق نقطوں میں کاٹے تو ایک منحنی دوسرے منحنی کو مس کریگا اور ان کے درمیان پہلے رتبہ کا تماس ہوگا۔ اور اگر تین منطبق نقطوں پر کاٹے تو دوسرے رتبہ کا تماس۔ پس اگر دو منحنی ایک دوسرے کو ن منطبق نقطوں پر کاٹیں تو (ن −۱) رتبہ کا تماس کہلاتا ہے۔

فرض کرو کہ دو منحنی ما = ف (لا) اور ما = فہ (لا) ایک دوسرے کو دو نقطوں ن اور ق پر کاٹتے ہیں اور انتہا میں جب یہ نقطے منطبق

ہو جاتے ہیں تو منحنیوں کا پہلے رُتبہ کا تماس ہوتا ہے۔




اب تفاعل فا (لا) = ف (لا) - فہ (لا) پر غور کرو۔ نقطہ ن اور ق پر فا (لا) صفر ہے اور مسلسل ہے اس لیے رول کے مسئلہ سے فاَ (لا) نقاط ن اور ق کے درمیان کسی نقطہ پر صفر ہوگا۔ اب اگر نقطہ ق، ن پر منطبق ہو جائے تو فاَ (لا) کو بھی ن پر صفر ہونا پڑیگا۔

یعنی فاَ (ا) = ۰ = فَ (ا) - فہَ (ا)

اس لیے پہلے رُتبہ کے تماس کے لیے ضروری اور کافی شرط ہے کہ

ف (ا) = فہ (ا)
اور فَ (ا) = فہَ (ا)

اگر منحنی تین نقطوں ن، ق اور سا پر کاٹتے ہیں تو اوپر کی دلیل سے ظاہر ہے کہ

فاَ (لا۱) = فاَ (لا۲) = ۰ جہاں لا۱ نقاط ن اور ق کے درمیان ہے اور لا۲ نقاط ق اور سا کے درمیان ہے۔ اس پر مکرر رول کا مسئلہ استعمال کرنے سے

فاً (لا۳) = ۰ جہاں لا۳ نقاط لا۱ اور لا۲ کے درمیان ہے۔

اب اگر ن، ق، سا مل کر نقطہ ن پر اکٹھے ہو جائیں تو لا۱ اور لا۲ کو بھی ن پر واقع ہونا ضروری ہوگا اور اس لیے دوسرے رُتبہ کے

تماس کے لیے ضروری اور کافی شرط ہے کہ

ف (ا) = فہ (ا)
فَ (ا) = فہَ (ا)
فً (ا) = فہً (ا)

اسی طرح ن ویں رُتبہ کے تماس کے لیے ضروری اور کافی شرط ہے کہ

ف (ا) = فہ (ا)، فَ (ا) = فہَ (ا)، ... ف$^{(ن)}$ (ا) = فہ$^{(ن)}$ (ا)

مثال (۱)۔ بتاؤ کہ منحنی ما = جب لا اور ما = لا ـ $\frac{لا^۳}{۶}$ کا مبدا پر کون سے رُتبہ کا تماس ہے۔ ظاہر ہے کہ مبدا پر دونوں منحنی ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں۔

دونوں منحنیوں کے ڈھال بالترتیب جم لا اور ۱ ـ $\frac{لا^۲}{۲}$ ہیں جو مبدا پر مساوی ہیں۔

دوسرے مشتق ہیں ـ جب لا اور ـ لا اور یہ بھی مساوی ہیں۔
تیسرے مشتق ہیں ـ جم لا اور ـ ۱ اور یہ بھی مساوی ہیں۔
چوتھے مشتق ہیں جب لا اور صفر اور یہ بھی مساوی ہیں۔
پانچویں مشتق نامساوی ہیں۔ اس لیے اِن دونوں منحنیوں میں چوتھے رُتبہ کا مبدا پر تماس ہے۔

(۲) منحنیات ۱ ـ $\frac{طہ^۲}{۲}$ اور ۱ ـ $\frac{طہ^۲}{۲}$ + $\frac{طہ^۴}{۲۴}$ کا جم طہ سے تماس دریافت کرو۔

(۳) منحنیات لا اور لا ـ $\frac{لا^۳}{۶}$ + $\frac{لا^۵}{۱۲۰}$ کا جب لا سے مبدا پر تماس دریافت کرو۔

(۴) منحنیات $\frac{لا}{ہو^{لا} - ۱}$ اور $\frac{لا^۲}{۱۲}$ ـ $\frac{لا}{۲}$ + ۱ کا تماس دریافت کرو۔

(۵) منحنیات مس (لا + $\frac{\pi}{۴}$) اور (۲ لا$^۲$ + ۲ لا + ۱) کی ترسیمیں کھینچو اور باہمی تماس دریافت کرو۔

(۶) جم$^۲$ لا اور ۱ ـ لا$^۲$ کی ترسیمیں کھینچو اور باہمی تماس دریافت کرو۔

(۷) ثابت کرو کہ دائرہ $لا^{۲} + ما^{۲} - ۴لا + ۷ما + ۱۶ = ۰$ نقطہ (۲، -۳) پر منحنی $ما = \frac{لا^{۲}}{۴} - ۲لا - \frac{۱}{۲}$ سے دوسرے رُتبہ کا تماس رکھتا ہے۔

**۶،۷ - انحنا** :- منحنی کے گولائی پن کے ناپ کی بہت سی تعریفیں کی گئی ہیں ان میں سے دو تعریفیں اہم ہیں۔ ایک تعریف تو اس طرح کی جاتی ہے کہ منحنی کے تین متصل نقطوں میں سے ایک دائرہ کو گزارو۔ اب دائرہ کو ایسے بدلو کہ تین نقطوں میں سے دو نقطے منحنی پر حرکت کرتے ہوئے تیسرے نقطے پر منطبق ہوجائیں تو دائرہ کی ایک انتہائی وضع ہوگی۔ اس دائرہ سے اس نقطہ پر منحنی کی گولائی کا معیار مقرر کیا جاتا ہے اور اسے دائرۂ انحنا کہتے ہیں۔ اس کا نصف قطر منحنی کا نصف قطر انحنا کہلاتا ہے اور دائرہ کے مرکز کو مرکزِ انحنا کہتے ہیں۔ نیز $\frac{۱}{\text{نصف قطر}}$ کو منحنی کا انحنا کہتے ہیں۔ گزشتہ دفعہ سے ظاہر ہے کہ دائرہ اور منحنی میں دوسرے رُتبہ کا تماس ہے۔ اس لیے بعض مصنف اس دائرہ کو لثمی دائرہ بھی کہتے ہیں۔ دوسرے رُتبہ کے تماس کے لیے ضروری ہے کہ زیرِ غور نقطے پر منحنی اور دائرہ کے ڈھال اور دوسرے مشتق مساوی ہوں۔ ان شرائط سے دائرہ کی مساوات میں نامعلوم مقداروں کی قیمتیں حاصل کی جاتی ہیں۔

۱،۶،۷ :- منحنی ما = ف (لا) کے کسی نقطہ (لا، ما) پر دائرۂ انحنا کی مساوات مطلوب ہے۔ فرض کرو کہ دائرۂ انحنا کی مساوات ہے
$(لا - عہ)^{۲} + (ما - بہ)^{۲} = ر^{۲}$ اور اس لیے مرکز کے محدد (عہ، بہ) ہونگے اور نصف قطر ر ہوگا۔ یہ تینوں چیزیں نامعلوم ہیں اور انہیں معلوم کرنے کے لیے تین مساوات درکار ہیں جو دوسرے رُتبہ کے تماس کی تین شرائط سے حاصل ہوتی ہیں۔

پہلی شرط سے نقطہ $(لا_{۱}، ما_{۱})$ دائرہ پر واقع ہے یعنی $(لا_{۱} - عہ)^{۲} + (ما_{۱} - بہ)^{۲} = ر^{۲}$

دائرہ کی مساوات کو تفرق کرنے سے $(\text{لا} - \text{عہ}) + (\text{ما} - \text{بہ}) \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۰$

$$\therefore \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = - \frac{\text{لا} - \text{عہ}}{\text{ما} - \text{بہ}}$$

اور

$$\frac{\text{فر}^۲\text{ما}}{\text{فرلا}^۲} = - \frac{۱}{\text{ما} - \text{بہ}} + \frac{\text{لا} - \text{عہ}}{(\text{ما} - \text{بہ})^۲} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$$

$$= - \frac{۱}{\text{ما} - \text{بہ}} - \frac{۱}{(\text{ما} - \text{بہ})} \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^۲ = - \frac{۱}{(\text{ما} - \text{بہ})} \left[۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^۲\right]$$

اب تماس کی باقی دو شرطوں سے ظاہر ہے کہ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ اور $\frac{\text{فر}^۲\text{ما}}{\text{فرلا}^۲}$ کی قیمتیں اس نقطہ پر منحنی اور دائرہ کے لیے ایک ہی ہونی چاہئیں۔ منحنی کے لیے ان کی قیمتیں معلوم ہیں اس لیے دائرہ کے لیے حاصل ہو گئیں۔ امتیاز کرنے کے لیے ان مشترک قیمتوں کو $\frac{\text{فرما}_۱}{\text{فرلا}_۱}$ اور $\frac{\text{فر}^۲\text{ما}_۱}{\text{فرلا}_۱^۲}$ سے تعبیر کر سکتے ہیں۔ پس

$$\frac{\text{فرما}_۱}{\text{فرلا}_۱} = - \frac{\text{لا}_۱ - \text{عہ}}{\text{ما}_۱ - \text{بہ}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{فر}^۲\text{ما}_۱}{\text{فرلا}_۱^۲} = \frac{۱}{\text{ما}_۱ - \text{بہ}} \left[۱ + \text{ز} \left(\frac{\text{فرما}_۱}{\text{فرلا}_۱}\right)^۲\right]$$

$$\therefore \text{ما}_۱ - \text{بہ} = \frac{۱ + \left(\frac{\text{فرما}_۱}{\text{فرلا}_۱}\right)^۲}{\frac{\text{فر}^۲\text{ما}_۱}{\text{فرلا}_۱^۲}} \quad \text{اور} \quad \text{لا}_۱ - \text{عہ} = - (\text{ما}_۱ - \text{بہ}) \frac{\text{فرما}_۱}{\text{فرلا}_۱} = \frac{\frac{\text{فرما}_۱}{\text{فرلا}_۱}\left[۱ + \left(\frac{\text{فرما}_۱}{\text{فرلا}_۱}\right)^۲\right]}{\frac{\text{فر}^۲\text{ما}_۱}{\text{فرلا}_۱^۲}}$$

اب ر معلوم کرنے کے لیے $\text{ما}_۱ - \text{بہ}$ اور $\text{لا}_۱ - \text{عہ}$ کی یہ قیمتیں دائرہ کی مساوات میں درج کرو:

$$\text{ر}^۲ = (\text{لا}_۱ - \text{عہ})^۲ + (\text{ما}_۱ - \text{بہ})^۲$$

$$= \frac{\left(\frac{\text{فرما}_۱}{\text{فرلا}_۱}\right)^۲ \left[\left(\frac{\text{فرما}_۱}{\text{فرلا}_۱}\right)^۲ + ۱\right]^۲}{\left(\frac{\text{فر}^۲\text{ما}_۱}{\text{فرلا}_۱^۲}\right)^۲} + \frac{\left[۱ + \left(\frac{\text{فرما}_۱}{\text{فرلا}_۱}\right)^۲\right]^۲}{\left(\frac{\text{فر}^۲\text{ما}_۱}{\text{فرلا}_۱^۲}\right)^۲}$$

$$= \frac{\left[1 + \left(\frac{\text{فر ما}_1}{\text{فر لا}_1}\right)^2\right]^3}{\left(\frac{\text{فر}^2 \text{ما}_1}{\text{فر لا}_1^2}\right)^2}$$

$$\therefore \text{ر} = \pm \frac{\left[1 + \left(\frac{\text{فر ما}_1}{\text{فر لا}_1}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\text{فر}^2 \text{ما}_1}{\text{فر لا}_1^2}}$$

اور مرکز کے محدد کے لیے

$$\text{ع} = \text{لا}_1 + \frac{\frac{\text{فر ما}_1}{\text{فر لا}_1}\left[1 + \left(\frac{\text{فر ما}_1}{\text{فر لا}_1}\right)^2\right]}{\frac{\text{فر}^2 \text{ما}_1}{\text{فر لا}_1^2}}$$

$$\text{اور بہ} = \text{ما}_1 - \frac{1 + \left(\frac{\text{فر ما}_1}{\text{فر لا}_1}\right)^2}{\frac{\text{فر}^2 \text{ما}_1}{\text{فر لا}_1^2}}$$

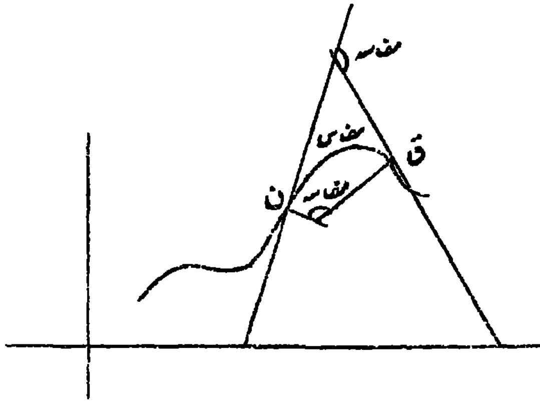
اگر منحنی پر کوئی نقطہ ($\text{لا}_1$، $\text{ما}_1$) کی بجائے (لا، ما) لیا جائے تو ان ضابطوں میں لاحقہ ۱ چھوڑ دیا جا سکتا ہے۔ پہلے ضابطہ میں علامت کا ابہام ہے اور اس کی وجہ یہ ہے کہ نصف قطر ایک طولی مقدار ہے اور اسے مثبت ہونا چاہیے لیکن اگر منحنی اوپر کی طرف مقعر ہو تو $\frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر لا}^2}$ مثبت ہے اور نیچے کی طرف مقعر ہو تو $\frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر لا}^2}$ منفی ہے

اس لیے اگر منحنی اوپر کی طرف مقعر ہو تو $\text{ر} = \frac{\left[1 + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر لا}^2}}$

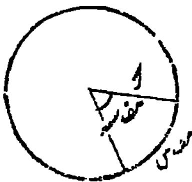
اور نیچے کی طرف مقعر ہو تو $\text{ر} = - \dfrac{\left[ 1 + \left( \dfrac{\text{فر ا}}{\text{فر لا}} \right)^{2} \right]^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{\text{فر}^{2}\text{ ا}}{\text{فر لا}^{2}}}$

## ۸،۶ - انحنا کی دُوسری تعریف :-

فرض کرو کہ منحنی پر دو متصل نقطے ن اور ق ہیں اور ان کے درمیان




فاصلہ مف س ہے اور مماسوں یا عمادوں کے درمیان زاویہ مف سہ ہے۔
تو انحنا کی دوسری تعریف کے مطابق $\dfrac{\text{مف سہ}}{\text{مف س}}$ کی انتہا کو انحنا کہتے ہیں جبکہ ق نقطہ ن کے بے حد قریب آجائے۔




دائرہ کی صورت میں مف س = ا مف سہ
جہاں ا دائرہ کا نصف قطر ہے۔

$$\therefore \text{نہا } \frac{\text{مف سہ}}{\text{مف س}} = \frac{\text{فر سہ}}{\text{فر س}} = \frac{1}{\text{ا}}$$

$\therefore \dfrac{\text{فر س}}{\text{فر سہ}} = \text{ا}$ چونکہ دائرہ کی صورت میں $\dfrac{\text{فر س}}{\text{فر سہ}}$ دائرہ کے نصف قطر کے

برابر ہے اس لیے منحنی کی صورت میں بھی $\frac{\text{فر س}}{\text{فر سہ}}$ نصف قطرِ انحنا کہلاتا ہے۔ اور منحنی کے عماد پر نصف قطر کی دوری والا نقطہ مرکزِ انحنا۔ انحنا کی یہ تعریف بہت سادہ ہے اور اس سے تمام محددوں میں نصف قطر کے لیے جملے آسانی سے حاصل ہو سکتے ہیں۔ کارٹیزی محددوں میں

$$\text{ر} = \frac{\text{فر س}}{\text{فر سہ}} = \frac{\text{فر س}}{\text{فر لا}} \times \frac{\text{فر لا}}{\text{فر سہ}}$$

$$= \pm \left[ ۱ + \left( \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} \right)^{۲} \right]^{\frac{۱}{۲}} \times \frac{\text{فر لا}}{\text{فر سہ}}$$

$\frac{\text{فر لا}}{\text{فر سہ}}$ معلوم کرنے کے لیے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{مس سہ}$ کو تفرق کرو تو

$$\frac{\text{فر}^{۲}\text{ ما}}{\text{فر لا}^{۲}} = \text{قط}^{۲}\text{ سہ} \times \frac{\text{فر سہ}}{\text{فر لا}}$$

$$\therefore \frac{\text{فر لا}}{\text{فر سہ}} = \frac{۱ + \left( \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} \right)^{۲}}{\frac{\text{فر}^{۲}\text{ ما}}{\text{فر لا}^{۲}}}$$

$$\therefore \text{ر} = \pm \frac{\left[ ۱ + \left( \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} \right)^{۲} \right]^{\frac{۳}{۲}}}{\frac{\text{فر}^{۲}\text{ ما}}{\text{فر لا}^{۲}}}$$

مرکز کے محدد (عہ، بہ) دریافت کرنے کے لیے شکل پر غور کرو۔ نقطہ ا پر منحنی نیچے کی طرف مقعر ہے اور

$$\text{عہ} = \text{لا} + \text{ر جب سہ}$$

$$\text{بہ} = \text{ما} - \text{ر جم سہ}$$

لیکن نقطہ ب پر منحنی اوپر کی طرف مقعر ہے

اور عہ = لا - رجب سہ

بہ = ما + رجم سہ

ان میں نئے جملے کی مناسب علامت کا خیال رکھ کر درج کرنے سے عہ اور بہ کے لیے ایک ہی جملے حاصل ہوتے ہیں

$$\text{جب سہ} = \frac{\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}}{\sqrt{1+\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2}} \quad \text{اور جم سہ} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2}}$$

$$\text{اس لیے عہ} = \text{لا} - \frac{\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\left[1+\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2\right]}{\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فر لا}^2}} \quad \text{اور بہ} = \text{ما} + \frac{1+\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2}{\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فر لا}^2}}$$

انحنا کے مرکز کے طریق کو بیچہ کہتے ہیں اور اس کی مساوات، منحنی کی مساوات اور عہ اور بہ کے جملوں میں سے لا، ما کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

مثال (۱) منحنی ۶ما = لا³ - ۱۲لا - ۲ کے نقطہ (۲، -۳) پر انحنا کا مرکز اور نصف قطر دریافت کرو:-

$$6\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = 3\text{لا}^2 - 12 \qquad \therefore \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)_{2,-3} = \text{صفر}$$

$$\text{اور } 6\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فر لا}^2} = 6\text{لا} \qquad \left[\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فر لا}^2}\right]_{\text{لا}=2} = 2$$

اس لیے عہ = ۲ + صفر = ۲

$$\text{بہ} = -3 - \frac{1+0}{2} = -\frac{7}{2}$$

$$\text{اور سما} = \frac{[1+0]^{\frac{3}{2}}}{2} = \frac{1}{2}$$

ذیل کے منحنیوں کے دیے ہوئے نقطوں پر انحنا کے مرکز کے محدد اور نصف قطر

دریافت کرو:-

(۲) $\text{ما} = \text{لا}^{۳}$ کے نقاط (۱، ۱) (-۲، -۸) اور $(\frac{۱}{۲}، \frac{۱}{۸})$

(۳) $\text{ما} = \frac{\text{لا}^{۲}}{۲}$ کے نقاط $(۱، \frac{۱}{۲})$ اور (-۲، ۲)

(۴) $\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ل}^{۲}} \pm \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ب}^{۲}} = ۱$ کے نقطہ (ل، ۰)

(۵) $\left(\frac{\text{لا}}{\text{ل}}\right)^{\frac{۲}{۳}} + \left(\frac{\text{ما}}{\text{ب}}\right)^{\frac{۲}{۳}} = ۱$ کے نقطہ (۰، ب)

(۶) متبدلی مساوات کی صورت میں کسی نقطہ پر انحنا کے مرکز کے محدد اور نصف قطر دریافت کرو:-

فرض کرو کہ منحنی کی مساوات ہے لا = ف (ت) اور ما = فہ (ت)

اب $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}}{\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}}$ اس لیے $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} = \frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left(\frac{\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}}{\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}}\right)$

$$= \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}}{\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}}\right) \times \frac{۱}{\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}}$$

$$= \frac{\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right)\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرت}^{۲}} - \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} \times \frac{\text{فر}^{۲}\text{لا}}{\text{فرت}^{۲}}}{\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right)^{۳}}$$

$$\text{پس عہ} = \text{لا} + \frac{\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} \times \left[\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right)^{۲} + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\right)^{۲}\right]}{\left[\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\,\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرت}^{۲}} - \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\,\frac{\text{فر}^{۲}\text{لا}}{\text{فرت}^{۲}}\right]}$$

$$\text{بہ} = \text{ما} - \frac{\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\left[\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right)^{۲} + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\right)^{۲}\right]}{\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\,\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرت}^{۲}} - \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\,\frac{\text{فر}^{۲}\text{لا}}{\text{فرت}^{۲}}}$$

$$\text{اور س} = \frac{\left[\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right)^{۲} + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\right)^{۲}\right]^{\frac{۳}{۲}}}{\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\,\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرت}^{۲}} - \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\,\frac{\text{فر}^{۲}\text{لا}}{\text{فرت}^{۲}}}$$

(۷) لا = ۳ ت$^{۲}$ ، ما = ۳ ت ـ ت$^{۳}$ کے نقطہ ت = ۱ پر انحنا اور مرکزِ انحنا کے محدّد دریافت کرو۔

(۸) لا = ۴ جب طہ ، ما = ۲ جم طہ کے نقطہ لا = ۲ پر نصف قطرِ انحنا دریافت کرو۔

(۹) ثابت کرو کہ لا = ا جم$^{۳}$ طہ ، ما = ا جب$^{۳}$ طہ کے کسی نقطہ پر نصف قطرِ انحنا = ۳ ا جب طہ جم طہ

(۱۰) ما = لا$^{۴}$ ـ ۲ لا$^{۲}$ میں اعظم اور اقل نقطوں پر انحنا معلوم کرو۔

(۱۱) ۳ ما = لا$^{۳}$ ـ ۲ لا پر وہ نقاط معلوم کرو جہاں انحنا اعظم یا اقل ہے۔

(۱۲) $\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ا}^{۲}} + \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ب}^{۲}} = ۱$ میں کسی نقطہ پر مرکزِ انحنا کے محدّد معلوم کرو اور بریجہ کی مساوات حاصل کرو۔

ذیل کے منحنیوں میں کسی نقطہ (لا ، ما) پر نصف قطرِ انحنا اور انحنا کے مرکز کے محدّد دریافت کرو :-

(۱۳) ما = لا$^{۲}$

(۱۴) ب$^{۲}$ لا$^{۲}$ ـ ا$^{۲}$ ما$^{۲}$ = ا$^{۲}$ ب$^{۲}$

(۱۵) لا$^{\frac{۲}{۳}}$ + ما$^{\frac{۲}{۳}}$ = ا$^{\frac{۲}{۳}}$

(۱۶) لا = ۲ ت ، ما = ۲ ت$^{۲}$ ـ ۱

(۱۷) لا = ۲ ت + ۱ ، ما = $\frac{\text{ت}^{۳}}{۳}$

(۱۸) لا = جب طہ ، ما = طہ

(۱۹) لا = ۱ - جم طہ ما = طہ - جب طہ

(۲۰) ما = لوک قط لا

(۲۱) زائد ۲ لا ما = $\text{ا}^{2}$ کے لیے ثابت کرو کہ

$$\text{عہ} + \text{بہ} = \frac{(\text{ما} + \text{لا})^{3}}{\text{ا}^{2}} \quad \text{اور} \quad \text{عہ} - \text{بہ} = \frac{(\text{ما} - \text{لا})^{3}}{\text{ا}^{2}}$$

اور اس سے برپیچہ کی مساوات نکالو۔

(۲۲) $\text{ما}^{3} = \text{ا}^{2}\,\text{لا}$ کے مرکزِ انحنا کے محدد اور نصف قطر دریافت کرو۔ بالخصوص مبدا پر ان کی قیمتیں حاصل کرو۔

# جوابات

## مشقی سوالات (۱) صفحہ ۱۳

(۱) ۸، ۱۸، ۴، -۶، -۲۹۶ (۲) $\frac{۱}{۴}$، ۰، -۵، $\frac{۱۳}{۱۴۷}$، ∞، ۲۱

(۴) ا لا² + (ب + ۲ ا) لا + (ا + ب + ج)؛ ا لا² + (ب - ۲ ا) لا + (ا - ب + ج)؛ ا ھ² + ۲ ا ھ لا + ب ھ؛ (۵) ∞

(۶) غیر معین (۱۱) ۰، $\frac{۳}{۴}$، ۴ - ۳ $\sqrt{۲}$ (۱۲) ۱، ۱

(۱۳) ۲ - $\sqrt{۳}$ (۱۴) $\frac{۲ + \sqrt{۳}}{۹}$ (۱۵) ۴ ا² + $\frac{۱}{۲ا}$ - ۲، $\frac{۱}{۲لا}$ - ۲ + لا

(۱۶) $\frac{۱}{۹}$ ۴ ھ، ۲ ا² + ا - ۱ + $\frac{۱}{ا + ۱}$ (۱۷) ھ (۲ لا + ھ + ۱)

(۱۸) - $\frac{۱}{ھ + ۱}$ (۲۲) $\frac{۱}{۲ لا}$

## مشقی سوالات (۲) صفحہ ۳۰

(۱) صفر (۲) ∞ (۳) صفر، صفر، صفر،

(۴) صفر (۵) صفر (۶) ∞ (۷) تواتر غیر محدود اہتزاز کرتا ہے۔ (۸) ۱۰۰۰

## مشقی سوالات (۳) صفحہ ۳۹

(۱) $\frac{۱}{۲}$ (۲) $\frac{۱}{۳}$ (۳) $\frac{۱}{۲}$ (۴) $\frac{۱}{۳}$ (۵) $\frac{۱}{۴}$

(۶) تواتر محدود اہتزاز کرتا ہے۔ (۷) $\frac{۲}{۳}$ (۸) $\frac{۳}{۷}$ ۔

## مشقی سوالات (۴) صفحہ ۵۵

(۱) $\frac{۱}{۲}$ (۲) $-\frac{۳}{۴}$ (۳) $\frac{۱}{۷}$ (۴) $\frac{۱}{۳}$ (۵) $-۱$

(۶) ۱ (۷) $-۴$ (۸) ۷ (۹) ۳ (۱۰) ۱ (۱۱) $\frac{۱}{۲}$

(۱۲) ۲ (۱۳) $\frac{۲}{۳}$ (۱۴) $\frac{۱}{۴}$ (۱۵) ۳ لا$^{۲}$ (۱۶) $-\frac{۲}{۹}$ (۱۷) $-۸$

(۱۸) ۲ لا (۱۹) $\frac{۲}{۳}$ (۲۰) $-۱$ (۲۱) $\frac{۲}{۳}$ (۲۲) $\frac{۴}{۵}$ (۲۳) ۱

(۲۴) صفر (۲۵) ۲ (۲۶) صفر (۲۸) $-۱$ (۲۹) صفر (۳۰) $\infty$

(۳۱) صفر (۳۲) $\frac{۳}{۲}$ (۳۳) صفر (۳۴) $\infty$ (۳۵) $\frac{۱}{۲}$ (۳۶) $-\frac{۱}{۱۲}$

(۳۷) $-۱۲$ (۳۸) $\frac{۳}{۲}$ (۳۹) $\frac{۱}{۳}$ (۴۰) صفر (۴۱) صفر ۔

## مشقی سوالات (۵) صفحہ ۷۰

(۵) (ا) لا $= \frac{۳}{۲}$ (ب) لا $= -۱$ (ج) لا $= \pm \frac{\pi ن}{۲}$ (ن = ۰، ۱، ۲، ۳ .....)

(د) لا = $-۳$، $-۲$، ۲، ۳ (ہ) لا $= \pm (۲ن + ۱)\frac{\pi}{۲}$ (ن = ۰، ۱، ۲ ...)

(و) لا $= \pm (۲ن + ۱)\pi$ (ن = ۰، ۱، ۲ ....)

(۶) ۲۷

## مشقی سوالات (۶) صفحہ ۹۴

(ا) ۴ (۲) $\frac{۳}{۴} \times \frac{۱}{۲ \overline{۴}}$ (۳) ۳ ل$^{۲}$ (۴) ۲ ن ا$^{ن۲-۱}$

(۵) (۲ن + ۱) ا$^{ن۲}$ (۶) ۴ لا$^{۳}$ (۷) $\frac{۲}{۳}$ لا$^{-\frac{۱}{۳}}$ (۸) $\frac{۱}{۴}$ لا$^{-\frac{۳}{۴}}$

(۹) $\frac{۱}{ن}$ لا$^{\frac{۱}{ن}-۱}$ (۱۰) صفر (۱۱) $\frac{۱}{۲\sqrt{ل}}$ (۱۲) $-\frac{۳}{۲۰}$

(۱۳) $\frac{۲}{ل^{۳}}$ (۱۴) $\frac{۱}{ن ا^{ن-۱}}$ (۱۵) $\frac{۳}{۲}$ ا$^{\frac{۱}{۲}}$

## مشقی سوالات (۷) صفحہ ۹۸

(ا) ۳ (۲) $\frac{۲}{۳}$ (۳) ۱ (۴) ۴

(۵) صفر (۶) ۱ (۷) ۸ (۸) ۴ (۹) $\frac{۳}{۲}$

(۱۰) جب عہ - عہ جم عہ

## مشقی سوالات (۸) صفحہ ۱۰۲

(ا) (ا) $\frac{۱۶}{۹}$، $-\frac{۸}{۹}$، $\frac{۵۵}{۹}$، $\frac{۵۶}{۲۵}$، ۲۴، صفر

(ب) ۱۸، $\frac{۴۷۳}{۵۴}$، $-\frac{۱۷۳}{۲}$، ۵۲۷، $-\frac{۹۵۳}{۲۵۰}$

(۲) $\frac{۲۵۰}{۲۲۷}$، $\frac{۱۲۵}{۲۱ \times ۳}$، $\frac{۶۵}{۲۳۶۰۱}$، $\frac{۶۰۵}{۲(۵۶۱۶)}$، $-\frac{۲}{۱۲۱}$،

(۳) $-\frac{۹۴}{۲۵}$، $-\frac{۱۲۹}{۲۵}$

(۴) (ا) $\frac{۵(\sqrt{۲}-۱)}{۲}$، $-\frac{۵}{۲}$

(ب) $\frac{\sqrt{۳} - \sqrt{۲}}{۲}$ ، $\frac{\sqrt{۳} - ۲}{۲}$

(ج) $\frac{۵}{۴}(\sqrt{۳} - ۱)$ ، $- \infty$

(د) $۳ \sqrt{۲} - \frac{۲}{\sqrt{۳}} - ۴$ ، $+ \infty$

## مشقی سوالات (۹) صفحہ ۱۰۷

(ا) (۱) ۲۸، ۴، ۱۹، ۷، $\frac{۳۳۱}{۲۵}$ ، $\frac{۲۷۱}{۲۵}$ ، $(۲ + \frac{۳۰۰۱}{۶۱۰})$

(ب) $۴(\pm \frac{۳}{۲} - ۱)$ ، $۴(\pm \frac{۵}{۴} - ۱)$ ، $۴(\pm \frac{۱}{۵۱۰} - ۱)$

(ج) $\frac{\text{جب}(\frac{\pi}{۳} \pm \frac{\pi}{۹۰}) - \text{جب}\frac{\pi}{۳}}{\pm \frac{\pi}{۹۰}}$ ، $\frac{\text{جب}(\frac{\pi}{۳} \pm \frac{\pi}{۱۸۰}) - \text{جب}\frac{\pi}{۳}}{\pm \frac{\pi}{۱۸۰}}$

$\frac{\text{جب}(\frac{\pi}{۳} \pm \frac{\pi}{۳۶۰}) - \text{جب}\frac{\pi}{۳}}{\pm \frac{\pi}{۳۶۰}}$

(د) $\frac{\text{مس}(\frac{\pi}{۴} \pm \frac{\pi}{۳۶۰}) - \text{مس}\frac{\pi}{۴}}{\pm \frac{\pi}{۳۶۰}}$ ، $\frac{\text{مس}(\frac{\pi}{۴} \pm \frac{\pi}{۵۴۰}) - \text{مس}\frac{\pi}{۴}}{\pm \frac{\pi}{۵۴۰}}$

جدول کی تفتیش سے معلوم کرو

(ہ) $\frac{۲۵}{۲۹} \frac{۱۱ \times}{(۲۹ \pm \frac{۱۵}{۴۱۰})}$ ، $\frac{۱۱ \times ۲۵}{۲۹(۲۹ \pm \frac{۴۵}{۹۱۰})}$

(و) $\frac{۷۱۰ -}{۳۶ \times ۳۹ \times ۴۹}$ ،

(۲) ۳۶، صفر، $-۲$ ، ۱

## مشقی سوالات (۱۰) صفحہ ۱۱۰

(۱) ۲ ، (۲) ۶لا ، (۳) ۳لا$^۲$ ، (۴) ۲لا + ۲ ، (۵) ۳لا$^۲$ − ۳

(۶) ۲- (۷) -۱۲ لا^۳ (۸) - ۱/۲لا (۹) ۹/۴لا (۱۰) ۱۲-/(۳لا-۴)^۲

(۱۱) ۲ جم ۲ طہ (۱۲) - ۳ جب ۳ طہ (۱۳) قط^۲ طہ

(۱۴) ۲ قط ۲ طہ مس ۲ طہ (۱۵) ۲ ا لا + ب

## مشقی سوالات (۱۱) صفحہ ۱۱۱

(۱) لا^۳/۳ + مر (۲) ۳ لا^۲/۲ + ۲ لا + مر (۳) ۲ لا^۳/۳ - ۳ لا^۲/۲ + مر

(۴) لا^۲ - لا + مر (۵) - جم لا + مر (۶) جب لا + مر

(۷) - جم ۲ لا/۲ + مر (۸) ۱/۳ جب ۳ لا + مر (۹) ۲ لا + ۳/لا + مر

(۱۰) ۳ لا^۲/۲ - ۷/۲ لا^۲ - لا + مر (۱۱) (- جم ۲ لا/۲ - جب ۳ لا/۳) + مر

## مشقی سوالات (۱۲) صفحہ ۱۱۳

(۱) ۲^۶ (۲) ۴ لا + ۳ (۳) ۲- ۱۰ لا - ۸/لا^۲

(۴) ۱۰ ص - ۱۸/ص^۲ (۵) ۵۰ - ۴۹/ی ۵۰ (۶) ۲ ا لا + ۲ ب

(۷) ۲ لا^۱/۳- + ۳ لا^۱/۲ (۸) (۶/۵ ۲^۵/۲ - ۳/۵ ۱^۵/۳-)/۵ (۹) ۱/۴ لا^۴/۹- (۱۰) -۳/۲ لا^۳/۲-

(۱۱) ۵/۲ م^۱/۲- (۱۲) -ا/۲ ت^۳/۲- + ب/۲ ت^۱/۲- + ۳/۲ ج ت^۱/۲

(۱۳) ۹ ی^۱/۳- - ۹ ی^۷/۳- (۱۴) - ۳ ا/۴ ت^۴ - ۲ ب/۳ ت^۳ + ج/۲ ت^۲

(۱۵) ۵ لا^۳/۳ + مر (۱۶) (۳ لا^۲/۲ + ۵ لا^۴/۴ - ۷ لا) + مر

(۱۷) $\left(\frac{۲\text{لا}^{۳}}{۳} + \frac{۱}{\text{لا}}\right) + \text{م}$ (۱۸) $\frac{(\text{ص} + ۲)^{۳}}{۳} + \text{م}$

(۱۹) $\left(\text{ی}^{۲} - \frac{۳}{۲}\,\text{ی}^{-۲}\right) + \text{م}$ (۲۰) $\frac{(\text{ا لا} + \text{ب})^{۴}}{۴\,\text{ا}} + \text{م}$

(۲۱) $\frac{۵ \times ۲^{\frac{۱}{۵}}\,\text{لا}^{\frac{۶}{۵}}}{۶} + \text{م}$ (۲۲) $\left(\frac{۱۶}{۷}\,\text{لا}^{\frac{۷}{۴}} + \frac{۱۵}{۷}\,\text{لا}^{\frac{۷}{۳}}\right) + \text{م}$

(۲۳) $\frac{۶}{۷}\,\text{ت}^{\frac{۷}{۶}} + \text{م}$ (۲۴) $۲\,\overline{\text{ات}}\left(\text{ا} + \frac{\text{ب ت}}{۳} + \frac{\text{ج}}{۵}\,\text{ت}^{۲}\right) + \text{م}$

(۲۵) $\frac{۱۶}{۷}\,\text{ء}^{\frac{۷}{۴}} + ۲۸\,\text{ء}^{\frac{۱}{۴}} - ۳\,\text{ء} + \text{م}$ (۲۶) $\frac{۱۵}{۱۳} \times \text{و}^{\frac{۱۳}{۱۵}} \times \frac{۱}{۵^{\frac{۱}{۳}}}$

## مشقی سوالات (۱۳) صفحہ ۱۱۶

(۱) $۶(۲\text{لا} + ۱)^{۲}$ (۲) $۳(۲\text{لا} + ۳)(\text{لا}^{۲} + ۳\text{لا} + ۵)^{۲}$

(۳) $۶(۲\text{لا}^{۲} - ۱)(۲\text{لا}^{۳} - ۳\text{لا} + ۷)$ (۴) $۴(۱۰\text{ی} - ۳)(۵\text{ی}^{۲} - ۳\text{ی} - ۱)^{۳}$

(۵) $۴(۳\text{ط}^{۲} - ۲)(\text{ط}^{۳} - ۲\text{ط})^{۳}$ (۶) $۹(۳\text{لا} - ۱)^{۲} + \frac{۱۲}{(\text{لا} + ۷)^{۴}}$

(۷) $-۶(۲\text{ی} - ۱)^{-۴}$ (۸) $\frac{-۲۰(۲\text{لا} - ۳)}{(\text{لا}^{۲} - ۳\text{لا} - ۳)^{۵}}$

(۹) $۵۰(۵\text{لا}^{۲} - ۲)^{۴}\text{لا} - \frac{۱۱۲(\text{لا} + ۱)}{(۲\text{لا}^{۲} + ۴\text{لا} - ۳)^{۸}}$ (۱۰) $۹۰(۳\text{لا} - ۱)^{۹} - ۱۸(۲\text{لا} - ۱)^{۲}$

(۱۱) $(۶\text{ص} + ۲ + \frac{۱}{\text{ص}^{۲}})(۲ + \frac{۶\text{لا}}{(\text{لا}^{۲} + ۵)^{۴}})$ جہاں $\text{ص} = ۲\text{لا} - \frac{۱}{(\text{لا}^{۲} + ۵)^{۳}}$

۱۲ $\frac{۶ - ۴\text{لا}}{۳}(۴ - \text{لا})^{-\frac{۲}{۳}}$

(۱۳) $\frac{۲}{۳}(۲\text{لا})^{-\frac{۲}{۳}} + \frac{۸\text{لا}}{۵}(۴\text{لا}^{۲} + ۵)^{-\frac{۴}{۵}}$ (۱۴) $-(۱۰ - ۲\text{لا})^{-\frac{۱}{۲}}$

(۱۵) $\frac{۲}{۳}$ (لا - ۱)(لا$^{۲}$ - ۲لا + ۳)$^{-\frac{۳}{۲}}$ (۱۶) $\frac{۲ت(۷ت - ۱)}{(۶ت - ۱)^{\frac{۲}{۳}}}$

(۱۷) $\frac{(۲لا - ۱)^{۴}}{۸}$ + م (۱۸) $\frac{(۴لا + ۳)^{۳}}{۱۲}$ + م (۱۹) $\frac{(۳لا - ۲)^{-۱}}{-۳}$ + م

(۲۰) $\frac{-(۵لا + ۱)^{-۳}}{۱۵}$ + م (۲۱) لا$^{۲}$ + ۳لا + $\frac{۲}{(لا + ۱)^{۲}}$ + م

(۲۲) ۲لا$^{۴}$ - $\frac{۷لا^{۲}}{۲}$ + لا - $\frac{۲}{۳(۳لا - ۱)}$ - $\frac{۴}{۵لا^{۵}}$ + م

۲۳) $\frac{(۴لا^{۳} - ۷لا + ۱)^{۵}}{۵}$ + م (۲۴) $\frac{۱}{۸}$(۵لا$^{۲}$ - ۴لا + ۲)$^{۴}$ + م

(۲۵) -$\frac{۳}{۴}$(۲ - لا)$^{\frac{۴}{۳}}$ + م (۲۶) لا$^{\frac{۲}{۳}}$ - $\frac{۳}{۵}$ لا$^{\frac{۵}{۳}}$ + م

(۲۷) $\frac{۱}{۴}$ (۶و - ۱)$^{\frac{۲}{۳}}$ + م (۲۸) -$\frac{۵}{۱۸}$(۲ - ۳ت)$^{\frac{۶}{۵}}$ + م

## مشقی سوالات (۱۴) صفحہ ۱۲۱

(۱) -۲ جب ۲ (۲ط + ۳) (۲) $\frac{-۹}{۲ط^{۲}}$ جب$^{۲}$ ($\frac{۳}{ط}$) جم ($\frac{۳}{ط}$)

(۳) ۲ جم (۲ط - ۳) + ۲ مس ط قط$^{۲}$ ط (۴) جم ۲ط

(۵) ۲ جم (۲ط - ۳) جم ط - جب (۲ط - ۳) جب ط

(۶) -۲ قم (۲ط) مم (۲ط) (۷) ۲ قط$^{۲}$ (ط - ۴) مس (ط - ۴)

(۸) ۲ قط$^{۲}$ (۲لا + ۱) + ۳ قم$^{۲}$ (لا + ۱) مم$^{۲}$ (لا + ۱)

(۹) جم (۲لا + ۱) جم (لا - ۲) - ۲ جب (۲لا + ۱) جب (لا - ۲)

(۱۰) ۳ قط^۳ (۲ لا^۲ − ۳ لا + ۴) مس (۲ لا^۲ − ۳ لا + ۴) × (۴ لا − ۳) − ۲۰ قم^۴ (۵ لا) مم (۵ لا)

(۱۱) −½ جم (۲ لا + ۳) + مر (۱۲) جب (لا − ۱) + مر

(۱۳) ¼ مس (۴ لا − ۱) + مر (۱۴) (ط/۲ − ¼ جب ۲ ط) + مر

(۱۵) (ط جب ۲ − ¼ جم ۴ ط)/۲ + مر (۱۶) − ½ مم (۲ ط) + مر

## مشقی سوالات (۱۵) صفحہ ۱۲۴

(۱) ۲ لا (۴ لا^۳ + ۱) (لا^۲ + ۱) (۲) − (۴ لا + ۹) لا^۴ (۲ لا + ۳)^۲

(۳) ۶ (۳ لا^۲ + ۳ لا − ۱) / (۶ لا + ۳)^۲ (۴) ۱۰ جم لا − (۸ لا^۲ − ۲ لا − ۳) جب لا / (۲ لا + ۱)^۲

(۵) (۲ مس لا + ۳) جب ۲ لا − ۲ قط^۲ لا (جب^۲ لا + ۱) / (۲ مس لا + ۳)^۲

(۶) ۲ جب ط قط^۲ (۲ ط + عہ) + جم ط مس (۲ ط + عہ)

(۷) جم (ط + عہ) جم (ط − عہ) − جب (ط + عہ) جب (ط − عہ) = جم ۲ ط

(۸) (ا لا + ب) جب (لا + عہ) (ا ج لا + ۲ ا د − ب ج) + جم (لا + عہ) · (ا لا + ب)^۲ (ج لا + د) / (ج لا + د)^۲

(۹) − (۳۵ لا^۲ + ۴۱ لا + ۳۳) / (۷ لا^۲ + ۸ لا − ۵)^۲

(۱۰) ما [ ۸/(۲ لا − ۱) + ۲ (۱۰ لا + ۳)/(۵ لا^۲ + ۳ لا − ۲) − ۴۸/(۸ لا^۲ + ۳) − ۶/(۳ لا + ۲) ]

جہاں ما = (۲ لا − ۱)^۴ (۵ لا^۲ + ۳ لا − ۲)^۲ / (۸ لا^۲ + ۳)^۳ (۳ لا + ۲)^۲

(۱۱) ما { ۲ مس ۲ ط + ۳ مم ۳ ط + ۳ مس ۳ ط − ۴ مم (۴ ط + ۵) }

ما = قط(۲ طہ) مس ۳ طہ / جب(۴ طہ + ۵)

(۱۲) (– حم فہ – ۲ مس(۲ فہ – ۱) – ۲ حم(۲ فہ – ۱) + ۳ مس(۳ فہ) – ۱/(۲ + فہ)) ما

ما = قم فہ حم(۲ فہ – ۱) قط(۳ فہ) / (فہ + ۲)

## مشقی سوالات (۱۶) صفحہ ۱۲۶

(۱) – (۱ + ۲ ما) / ۲(لا + ۳ ما + ۲) ،  (۲) ۱ / (۲۱ ما۲ – ۱۶ ما)

(۳) – ۱ / ۲ قم(۲ ما + ۳) حم(۲ ما + ۳)  (۴) (۴ ما۳ + ۳ ما) / (۲۰ ما – ۱۲ ما۲ لا۲ – ۳ لا)

(۵) (ما – ۲ لا قط۲(لا۲ + ما۲)) / (– لا + ۲ ما قط۲(لا۲ + ما۲))  (۶) ما/لا × (قط لا/ما مس لا/ما – ۲ لا ما) / (قط لا/ما مس لا/ما)

(۷) – (۲ لا √(لا ما) + ما) / (۲ ما √(لا ما) + لا)  (۸) ۱/لا  (۹) لا(۲ لا۲ – ما۲) / ما(لا۲ – ۴ ما۲)

(۱۰) (ما – لا۲) / (ما۲ – لا)  (۱۱) – ۱/۴  (۱۲) – ۲/۳  (۱۳) ۲/۳

(۱۴) ۱/۲  (۱۵) ۳/۴ ، – ۴/۳ ، – ۴/۳

## مشقی سوالات (۱۷) صفحہ ۱۳۱

(۱) – ۲ جب(۲ لا + ۳) / (√جم(۲ لا + ۳) ما √(جم۲(۲ لا + ۳) – ۱))  (۲) – ۲

(۳) $-\frac{1}{\sqrt{\text{ر}^2-\text{لا}^2}}$　(۴) $\frac{1}{\sqrt{\text{ر}^2-\text{لا}^2}}$　(۵) $\frac{\text{ر}}{\text{ر}^2+\text{لا}^2}$

(۶) $\frac{1}{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^2-\text{ر}^2}}$　(۷) $-\frac{\text{ر}}{\text{ر}^2+\text{لا}^2}-\frac{\text{ر}}{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^2-\text{ر}^2}}$

(۸) $\frac{-1}{(1-\text{لا})\sqrt{\text{لا}^2-2\text{لا}}}$　(۹) $\frac{\text{لا}^2}{1+\text{لا}^2}+2\text{لا}\,\text{مس}^{-1}\text{لا}$

(۱۰) $\text{مس}^{-1}\text{لا}^2+\frac{2\text{لا}}{1+\text{لا}^4}+\frac{5}{\text{لا}^2+4}$　(۱۱) $\frac{1}{2\sqrt{\text{لا}}\,(1+\text{لا})}$

(۱۲) $\frac{1}{2\sqrt{\text{لا}-4}}+\frac{4}{4+(\text{لا}-4)^2}$

(۱۳) $\frac{2\text{لا}}{\sqrt{1-\text{لا}^4}}+\text{قط}^{-1}+\frac{\text{لا}}{2}+\frac{4}{\sqrt{\text{لا}^2-4}}$

(۱۴) $-\text{قط}^{-1}(\text{ر}\text{لا}^2+\text{ب}\text{لا}+\text{ج})\times\frac{(2\text{ر}\text{لا}+\text{ب})}{(\text{ر}\text{لا}^2+\text{ب}\text{لا}+\text{ج})\sqrt{(\text{ر}\text{لا}^2+\text{ب}\text{لا}+\text{ج})^2-1}}$

$+\text{قم}^{-1}(\text{ر}\text{لا}^2+\text{ب}\text{لا}+\text{ج})\times\frac{(2\text{ر}\text{لا}+\text{ب})}{(\text{ر}\text{لا}^2+\text{ب}\text{لا}+\text{ج})\sqrt{(\text{ر}\text{لا}^2+\text{ب}\text{لا}+\text{ج})^2-1}}$

(۱۵) $\text{جب}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ر}}$　(۱۶) $\frac{1}{3}\text{جم}^{-1}\frac{2}{3\text{لا}}$　(۱۷) $\frac{1}{\text{ر}^2}\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ر}^2}$

(۱۸) $\frac{1}{\text{ر}\text{ب}}\text{مس}^{-1}\frac{\text{ب}\text{لا}+\text{ج}}{\text{ر}}$　(۱۹) $\frac{1}{12}\text{مس}^{-1}\frac{2\text{لا}^2}{3}$

(۲۰) $-\text{لا}+\frac{3}{2\sqrt{3}}\text{مس}^{-1}\frac{\sqrt{3}\,\text{لا}}{2}$ . . . . . . . . . . .

(۲۱) $\frac{4}{3}+\frac{5}{2\sqrt{3}}\text{مس}^{-1}\sqrt{3}\,\text{لا}$

(۲۲) $\text{ر}\text{لا}+\frac{\text{ب}-\text{ر}\text{د}^2}{\text{د}}\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{د}}$

(۲۳) $\frac{۱}{\sqrt{۷}}$ جب$^{-۱}$ $\sqrt{\frac{۷}{۵}}$ لا  (۲۴) $-$جب$^{-۱}$ $\frac{ﮎ - لا}{ﮎ}$

(۲۵) $-$جب$^{-۱}$ $\frac{ب - ۲ طہ}{ب}$  (۲۶) $\frac{۱}{\sqrt{۸}}$ جب$^{-۱}$ $\frac{۲ ﮎ}{\sqrt{۳}}$  (۲۷) $\frac{۱}{ﮎ}$ قط$^{-۱}$ $\frac{لا}{ﮎ}$

(۲۸) $\frac{۱}{۴}$ قط$^{-۱}$ $\frac{۲ لا}{۳}$  (۲۹) $\frac{۱}{\sqrt{۱۲}}$ قط$^{-۱}$ $\frac{۲ لا}{\sqrt{۱۲}}$

(۳۰) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ $($ ۳ لا $-$ قط$^{-۱}$ $\frac{\sqrt{۵} لا}{\sqrt{۳}}$ $)$

## مشقی سوالات (۱۸) صفحہ ۱۳۷

(۱) $\frac{لا جم لا - جب لا}{لا^{۲}}$  (۲) $\frac{۱}{و^{۲} (لا + ۱) - ۱}$

(۳) $\frac{۱}{۲ \sqrt{لا}}$ $و^{\sqrt{لا}}$  (۴) $لا^{لا}$ (لوک لا + ۱)

(۵) $(\sqrt{لا})^{لا^{۲}} \times \frac{لا}{۲}$ (۱ + ۲ لوک لا)  (۶) $\frac{۶ لا^{۲} + ۳}{۲ لا^{۳} + ۳ لا - ۵}$

(۷) ۱۰ لا $و^{۵ لا^{۲} + ۷}$  (۸) $(\sqrt{لا})^{\sqrt{لا}} \times \frac{۱}{۲ \sqrt{لا}}$ (۱ + لوک $\sqrt{لا}$)

(۹) $\sqrt{و^{لا}} \left\{ \frac{۸ لا + ۳}{۴ لا^{۲} + ۳ لا} + \frac{لوک (۴ لا^{۲} + ۳ لا)}{۲} \right\}$

(۱۰) (جب)$^{مس لا}$ (قط$^{۲}$ لا لوک جب لا + ۱)

(۱۱) (مس لا)$^{مس لا}$ [ قط$^{۲}$ لا لوک مس لا + قط$^{۲}$ لا ]

(۱۲) (قط لا)$^{قم لا}$ ( $-$ قم لا حم لا لوک قط لا + قط لا )

(۱۳) $و^{مس^{-۱}(قط \frac{لا}{۲})} \times \frac{۱}{۲} \frac{مس \frac{لا}{۲} قط \frac{لا}{۲}}{۱ + قط^{۲} \frac{لا}{۲}}$

(۱۴) $و^{۲لا^{۲}-۳لا۲} \{ ۴لا - ۳ [لوک (۲لا^{۲}+۳)]^{۲} + \frac{۱۶ لا}{۴لا^{۲}+۳} لوک (۲لا^{۲}+۳) \}$

(۱۵) $\frac{و^{۲لا+۳}}{۲} + مر$ (۱۶) $\frac{و^{۵لا-۱}}{۵} + مر$ (۱۷) $و^{۲لا^{۳}+۳لا^{۲}-۴لا} + مر$

(۱۸) $\frac{۱}{۴}$ لوک (۴لا+۳) + مر (۱۹) $\frac{۱}{۷}$ لوک (۷لا - ۲) + مر

(۲۰) لوک (۷لا$^{۲}$ - ۵لا + ۱) + مر (۲۱) $و^{۳لا+\frac{۱}{لا}}$ + مر

(۲۲) $\frac{۳}{۷}$ لوک (۷لا + ۸) + مر (۲۳) $\frac{۳}{۴}$ لا + $\frac{۱۹}{۱۶}$ لوک (۴لا + ۳) + مر

(۲۴) لا + لوک (۳لا$^{۲}$ + لا - ۱) + مر

## مشقی سوالات (۱۹) صفحہ ۱۴۰

(۱) ۳۰ (۲) ۴۰۵۰۴۰ لا$^{۳}$+۴۰۸۰ لا (۳) $۲^{۴}$ جم (۲لا + ۳ + $۴\frac{\pi}{۲}$)

(۴) $۲^{۳} و^{۲لا-۳}$ (۵) صفر (۶) $و^{جب لا}$ [جم$^{۲}$ لا - جب لا]

(۸) $(ا^{۲} + ن^{۲})^{\frac{ن}{۲}} و^{الا}$ جم (ن لا + ن $\frac{\pi}{۲}$)

(۹) $-۲^{ن-۱}$ جم (۲لا + $\frac{ن\pi}{۲}$) (۱۲) لا $\frac{فرما}{فرلا} = \frac{ما^{۲}}{۱ - ما لوک لا}$

(۱۵) $\frac{۲(-۱)^{ن} |ن}{(لا+۳)^{ن+۱}}$ (۱۶) $\frac{(-۱)^{ن-۱} |ن-۱}{(۲لا-۳)^{ن}} \times ۲^{ن}$

(۱۷) $۲^{۱} و^{۲لا} لا^{۳}$ + ۱۰ج$_{۱}$ × $۲^{۹}$ $و^{۲لا}$ × ۳لا$^{۲}$ + ۱۰ج$_{۲}$ $۲^{۸}$ $و^{۲لا}$ × ۶لا + ۱۰ج$_{۳}$ $۲^{۷}$ $و^{۲لا}$ × ۶

(۱۸) (جب لا)$^{جم لا}$ [-جب لا لوک جب لا + جم لا مم لا]

(۱۹) $(\text{جب} \, لا)^{\text{س} \, لا} \{ \text{قط}^{۲} \, لا \, \text{لوک جب} \, لا + \frac{۱}{۱} \}$ (۲۰) $لا \, و^{لا} + ۲ \, و^{لا}$

(۲۱) $\frac{لا^{۳}}{۱۲} + م_{۱} \, لا + م_{۲}$ (۲۲) $\frac{لا^{۴}}{۱۲} - \frac{لا^{۳}}{۳} + \frac{لا^{۲}}{۲} + م_{۱} \, لا + م_{۲}$

(۲۳) $- \text{جب} \, لا + م_{۱} \, لا + م_{۲}$ (۲۴) $\frac{م_{۱} \, لا^{۲}}{۲} + م_{۲} \, لا + م_{۳}$

(۲۵) $\frac{(لا - ۳)^{-۲}}{۶} + م \, لا + م_{۲}$ (۲۶) $\frac{۵}{۱۶} \, \text{لوک} \, (۲ \, لا + ۰) + م_{۱} \frac{لا^{۲}}{۲} + م_{۲} \, لا + م_{۳}$

## مشقی سوالات (۲۰) صفحہ ۱۳۲

(۱) $- \frac{لا}{ی} ، - \frac{ا}{ی} ، \frac{ا^{۲} + ی^{۲}}{ی^{۳}} ، \frac{ا^{۲} + ی^{۲}}{ی^{۳}} ، \frac{- لا \, ا}{ی^{۳}}$

(۲) $ا \, لا^{ا - ۱} ، لا^{ا} \, \text{لوک} \, لا$

(۳) $\frac{۱}{ا^{۲} - لا^{۲}} ، \frac{- لا}{ا^{۲} - لا^{۲}} ، \frac{+ لا}{(ا^{۲} - لا^{۲})^{۲}} ، \frac{۲ ا^{۲} (ا^{۲} - لا^{۲})}{(ا^{۲} - لا^{۲})^{۳}} ، \frac{- ا}{(ا - لا)^{۳}}$

(۴) $ن \, (ا \, لا^{۲} + ب \, ا^{۲} + ج \, ی^{۲})^{ن - ۱} \, ۲ \, ج \, ی$

(۶) $و^{لا} + و^{ا} + ۲ \cdot و \, \text{جب} \, (لا + ا)$

(۷) $\frac{۳ (لا^{۲} + ا^{۲} + ی^{۲}) - ۳ (لا \, ا + ا \, ی + ی \, لا)}{لا^{۳} + ا^{۳} + ی^{۳} - ۳ \, لا \, ا \, ی} = \frac{۳}{لا + ا + ی}$

## باب سوم پر متفرق سوالات صفحہ ۱۳۵

(۱) $۵ (لا^{۳} + ۲ لا - ۱)^{۴} (۳ لا^{۲} + ۲ لا)$

(۲) $\frac{(۲۰ لا^{۴} + ۱۵ لا^{۳} - ۲ لا^{۲} + ۱۰ لا + ۳)(لا^{۲} - ۱)}{(۵ لا^{۲} + ۳ لا - ۱)^{۲}}$

(۳) $\text{جم}\left(\frac{\text{۲لا}+۳}{\text{لا}-۱}\right)\times\frac{-۵}{(\text{۱-لا})^۲}$ (۴) $\text{قط}^۲\left(\frac{۱}{\text{۱-لا}}\right)\times\frac{۱}{(\text{۱-لا})^۲}$

(۵) $\frac{-\sqrt{۲}}{\sqrt{۱-\text{۲لا}^۲}}$ (۶) $\frac{-۲}{\sqrt{۱-\text{۷لا}^۲}\,(۱-\text{۳لا}^۲)}$

(۷) $\frac{-\text{۱۴لا}}{\text{۳۵لا}^۴-\text{۴لا}^۲+۱}$ (۸) $\frac{-۲}{\sqrt{۱-\text{۴م}^۲}}$ (۹) $\frac{۱}{۲}\,\text{حم}\,\frac{\text{طہ}}{۲}$

(۱۰) $\frac{\text{لوک لا}}{(۱+\text{لوک لا})^۲}$ (۱۱) $-\text{قط طہ}$ (۱۲) $\text{قو}^{۲-\text{۳لا}^۲}(-\text{۶لا}^۴+\text{۳لا}^۲)$

(۱۳) $\frac{۱۴(\text{۲لا}-۱)}{(\text{لا}+۴)^۲(\text{لا}-۵)^۲}$ (۱۴) $-\frac{\text{م}}{\text{لا}}\;\frac{\text{لا}^۲-\text{م}^۲}{\sqrt{\text{لا}^۲-\text{م}^۲}}$

(۱۵) $\frac{-\text{۹لا}}{\text{۵م}}$ (۱۶) $\text{قو}^{\text{مس لا}}(\text{جب لا قط}^۲\text{ لا}+\text{جم لا})$

(۱۷) $\text{قو}^{\text{جب}^۲\text{ لا}}(\text{مس لا جب ۲لا}+\text{قط}^۲\text{لا})$ (۱۸) $\frac{\text{قو}^{\text{لا}}-\text{قو}^{-\text{لا}}}{۲}$

(۱۹) $\frac{\text{قو}^{\text{لا}}+\text{قو}^{-\text{لا}}}{۲}$ (۲۰) $\frac{۴}{(\text{قو}^{\text{لا}}+\text{قو}^{-\text{لا}})^۲}$

(۲۱) $(\text{جب}^{-۱}\text{لا})^{\text{مس لا}}\left[\text{قط}^۲\text{ لا لوک جب}^{-۱}\text{لا}+\frac{\text{مس لا}}{\text{جب}^{-۱}\text{لا}\sqrt{۱-\text{لا}^۲}}\right]$

(۲۲) $(\text{قم}^{-۱}\text{لا})^{\text{جب لا}}\left[\text{جم لا لوک قم}^{-۱}\text{لا}-\frac{\text{جب لا}}{\text{قم}^{-۱}\text{لا}\times\text{لا}\sqrt{\text{لا}^۲-۱}}\right]$

(۲۳) $\frac{۱}{۴}\,\text{لوک}\,(\text{۴لا}^۲+۳)+\frac{۳}{۲\sqrt{۳}}\,\text{مس}^{-۱}\frac{\text{۲لا}}{\sqrt{۳}}$

(۲۴) $\frac{(\text{۳لا}^۲+\text{۳لا}-۵)^{-۵}}{-۱۵}+\text{ھر}$ (۲۵) $\frac{۱}{\sqrt{۸}}\,\text{مس}^{-۱}\frac{\text{لا}+۲}{\sqrt{۸}}$

(۲۶) $\frac{۱}{۶}\,\text{قو}^{\text{۳لا}^۲}+\text{ھر}$ (۲۷) $\frac{۱}{\sqrt{۷}}\,\text{جب}^{-۱}\frac{\sqrt{۷}\,\text{لا}}{\sqrt{۳}}+\text{ھر}$

(۲۸) $\frac{۱}{۲}$ جب$^{-۱}$ $\frac{۸لا-۵}{۵}$ + م   (۲۹) $\frac{۱}{۲\sqrt{۵}}$ مس$^{-۱}$ $\frac{لا^۲}{\sqrt{۵}}$ + م

(۳۰) $\frac{۱}{۲\sqrt{۱۵}}$ مس$^{-۱}$ $\sqrt{\frac{۵}{۳}}$ ص$^۲$ + م   (۳۱) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ قط$^{-۱}$ $\sqrt{\frac{۵}{۳}}$ لا

(۳۲) قط$^{-۱}$ ۲س   (۳۳) $\frac{۱}{۲}$ قط$^{-۱}$ $\frac{\sqrt{۵}\,لا}{۲}$

(۳۴) $\frac{۲}{\sqrt{۳۹}}$ مس$^{-۱}$ $\frac{۴لا+۷}{\sqrt{۳۹}}$   (۳۵) $\frac{۱}{۲}$ لوک $\frac{لا-۱}{لا+۱}$

(۳۶) لوک $\frac{لا+۲}{لا+۳}$ + م   (۳۷) $\frac{۳}{۲}$ لوک (لا + ۳) − $\frac{۱}{۲}$ لوک (لا + ۱)

(۳۸) $\frac{۱}{۲}$ لوک قط (۲لا + ۳)   (۳۹) لوک {قط (لا − ۳) + مس (لا − ۳)} + م

(۴۰) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ جب$^{-۱}$ ($\sqrt{۳}$ لا − ۱)

(۴۱) و$^{۲لا}$ [۲$^۷$ لا$^۳$ + ۷ج$_۱$ × ۲$^۶$ × ۳لا$^۲$ + ..... + ۷ج$_۳$ × ۲$^۴$ × ۶]

(۴۲) ۳$^۵$ جم (۳لا + $\frac{۵\pi}{۲}$)   (۴۳) $\frac{۲ \times \lfloor ۶}{(۳-لا)^۷}$

(۴۴) ۲$^ن$ جب (۲لا + $\frac{ن\pi}{۲}$)

(۴۵) ۲و$^{لا^۲}$ [(۴لا$^۲$ + ۱) جم (لا$^۲$) + جب (لا$^۲$)]

(۴۶) $\frac{۳}{لا^۲}$ حم لوک (ا لا) قم$^۲$ (لوک ا لا) [−۲ + ۴ قم$^۲$ (لوک ا لا) + حم لوک ا لا]

(۴۷) و$^{قط^{-۱} ۲ط}$ [$\frac{۱}{۴ط^۲ (۴ط^۲-۱)}$ − $\frac{۴ط (۸ط^۲-۱)}{(۱۶ط^۲ - ۴ط^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$]

(۴۸) $\frac{(لوک ا)^۲ [ا^{لا} - ا^{۳لا}]}{(۱ + ا^{۲لا})^۲}$   (۴۹) −و$^{\frac{۱}{لا}}$ [$\frac{۶لا^۲ - ۳لا + ۱}{لا^۴}$]

(۵۰) $\frac{و^{مس^{-۱} لا}}{(۱+لا^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$   (۵۱) $\frac{-ن ب (ا^۲ + ب لا^۲)}{(ا^۲ - ب لا^۲)^۲}$

(۵۲) $\frac{-\text{ج}^{۲}}{\text{ا}^{۲}}$ ، $\frac{\text{لا}}{\text{ی}}$ ، $\frac{-\text{ج}^{۲}}{\text{ب}^{۲}}$ ، $\frac{\text{ما}}{\text{ی}}$ ، $\frac{-\text{ج}^{۲}(\text{ج}^{۲}\text{لا}^{۲}+\text{ا}^{۲}\text{ی}^{۲})}{\text{ا}^{۴}\text{ی}^{۳}}$ ،

$\frac{-\text{ج}^{۲}}{\text{ب}^{۴}\text{ی}^{۳}}(\text{ج}^{۲}\text{ما}^{۲}+\text{ب}^{۲}\text{ی}^{۲})$ ، $\frac{-\text{ج}^{۴}\text{لا}\,\text{ما}}{\text{ا}^{۲}\text{ب}^{۲}\text{ی}^{۳}}$

(۵۳) $\frac{۲\text{لا}}{\text{ی}}$ ، $\frac{۳\text{ما}}{\text{ی}}$ ، $\frac{۲(\text{ی}^{۲}-۲\text{لا}^{۲})}{\text{ی}^{۳}}$ ، $\frac{۳(\text{ی}^{۲}-۳\text{ما}^{۲})}{\text{ی}^{۳}}$ ، $\frac{-۶\text{لا}\,\text{ما}}{\text{ی}^{۳}}$

(۵۴) $\frac{\text{لا}}{۲}-\frac{\text{ما}}{۶}$ ، $-\frac{\text{لا}}{۶}+\frac{۲\text{ما}}{۵}$ ، $\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۲}{۵}$ ، $-\frac{۱}{۶}$

(۵۵) $\frac{۱}{\sqrt{۱-\text{لا}^{۲}}}$ ؛ $\frac{۱}{\sqrt{۱-\text{ما}^{۲}}}$ ؛ $\frac{\text{لا}}{(۱-\text{لا}^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$ ؛ $\frac{\text{ما}}{(۱-\text{ما}^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$ ، صفر

(۵۶) $+\frac{\text{ما}(\text{لا}^{۲}-\text{ما}^{۲})}{(\text{لا}^{۲}+\text{ما}^{۲})^{۲}\times\text{جب ی}}$ ، $-\frac{\text{لا}(\text{لا}^{۲}-\text{ما}^{۲})}{(\text{لا}^{۲}+\text{ما}^{۲})^{۲}\,\text{جب ی}}$ ،

$-\left[\frac{۲\text{لا}\,\text{ما}(\text{لا}^{۲}-۳\text{ما}^{۲})}{(\text{لا}^{۲}+\text{ما}^{۲})^{۳}}+\frac{\text{جم ی}\,\text{ما}^{۲}(\text{لا}^{۲}-\text{ما}^{۲})^{۲}}{\text{جب}^{۲}\text{ی}\,(\text{لا}^{۲}+\text{ما}^{۲})^{۴}}\right]\times\frac{۱}{\text{جب ی}}$ ،

$-\left[\frac{۲\text{لا}\,\text{ما}(\text{ما}^{۲}-۳\text{لا}^{۲})}{(\text{لا}^{۲}+\text{ما}^{۲})^{۳}}+\frac{\text{جم ی}\,\text{لا}^{۲}(\text{لا}^{۲}-\text{ما}^{۲})^{۲}}{\text{جب}^{۲}\text{ی}\,(\text{لا}^{۲}+\text{ما}^{۲})^{۴}}\right]\times\frac{۱}{\text{جب ی}}$ ، ...+

(۵۷) $\frac{\text{لا}^{۲}-\text{ما}^{۲}-\text{ی}^{۲}}{\text{لا}(\text{لا}^{۲}+\text{ما}^{۲}+\text{ی}^{۲})}$ ، $\frac{\text{ما}^{۲}-\text{لا}^{۲}-\text{ی}^{۲}}{\text{ما}(\text{لا}^{۲}+\text{ما}^{۲}+\text{ی}^{۲})}$ ، $\frac{\text{ی}^{۲}-\text{لا}^{۲}-\text{ما}^{۲}}{\text{ی}(\text{لا}^{۲}+\text{ما}^{۲}+\text{ی}^{۲})}$

$\frac{۲\text{لا}^{۲}(\text{لا}^{۲}+\text{ما}^{۲}+\text{ی}^{۲})-(\text{لا}^{۲}-\text{ما}^{۲}-\text{ی}^{۲})(۳\text{لا}^{۲}+\text{ما}^{۲}+\text{ی}^{۲})}{\text{لا}^{۲}(\text{لا}^{۲}+\text{ما}^{۲}+\text{ی}^{۲})^{۲}}$ ،

$\frac{۲\text{ما}^{۲}(\text{لا}^{۲}+\text{ما}^{۲}+\text{ی}^{۲})-(\text{ما}^{۲}-\text{لا}^{۲}-\text{ی}^{۲})(۳\text{ما}^{۲}+\text{لا}^{۲}+\text{ی}^{۲})}{\text{ما}^{۲}(\text{لا}^{۲}+\text{ما}^{۲}+\text{ی}^{۲})^{۲}}$ ،

$\frac{۲\text{ی}^{۲}(\text{لا}^{۲}+\text{ما}^{۲}+\text{ی}^{۲})-(\text{ی}^{۲}-\text{لا}^{۲}-\text{ما}^{۲})(۳\text{ی}^{۲}+\text{لا}^{۲}+\text{ما}^{۲})}{\text{ی}^{۲}(\text{لا}^{۲}+\text{ما}^{۲}+\text{ی}^{۲})^{۲}}$ ،

$\frac{-۴\text{لا}\,\text{ما}}{(\text{لا}^{۲}+\text{ما}^{۲}+\text{ی}^{۲})^{۲}}$ ، $\frac{-۴\text{لا}\,\text{ی}}{(\text{لا}^{۲}+\text{ما}^{۲}+\text{ی}^{۲})^{۲}}$ ، $\frac{-۴\text{ما}\,\text{ی}}{(\text{لا}^{۲}+\text{ما}^{۲}+\text{ی}^{۲})^{۲}}$

(۵۸) $۲\text{لا}\,\text{و}^{\text{لا}^۲+\text{ما}^۲+\text{ی}^۲}$، $۲\text{ما}\,\text{و}^{\text{لا}^۲+\text{ما}^۲+\text{ی}^۲}$، $۲\text{ی}\,\text{و}^{\text{لا}^۲+\text{ما}^۲+\text{ی}^۲}$، $۲\text{و}^{\text{لا}^۲+\text{ما}^۲+\text{ی}^۲}(۱+۲\text{لا}^۲)$،
$۲\text{و}^{\text{لا}^۲+\text{ما}^۲+\text{ی}^۲}(۱+۲\text{ما}^۲)$، $۲\text{و}^{\text{لا}^۲+\text{ما}^۲+\text{ی}^۲}(۱+۲\text{ی}^۲)$، $۴\text{لاما}\,\text{و}^{\text{لا}^۲+\text{ما}^۲+\text{ی}^۲}$، $۴\text{مای}\,\text{و}^{\text{لا}^۲+\text{ما}^۲+\text{ی}^۲}$، $۴\text{یلا}\,\text{و}^{\text{لا}^۲+\text{ما}^۲+\text{ی}^۲}$

(۵۹) $\frac{۲\text{لا}\,\text{و}^{\text{لا}+\text{ما}}}{\text{لا}^۲+\text{ما}^۲}+\text{ی}$، $\frac{۲\text{ما}\,\text{و}^{\text{لا}+\text{ما}}}{\text{لا}^۲+\text{ما}^۲}+\text{ی}$، $\frac{۲\text{و}^{\text{لا}+\text{ما}}}{\text{لا}^۲+\text{ما}^۲}\left(۲\text{لا}+۱-\frac{۲\text{لا}^۲}{\text{لا}^۲+\text{ما}^۲}\right)+\text{ی}$،
$\frac{۲\text{و}^{\text{لا}+\text{ما}}}{\text{لا}^۲+\text{ما}^۲}\left(۲\text{ما}+۱-\frac{۲\text{ما}^۲}{\text{لا}^۲+\text{ما}^۲}\right)+\text{ی}$، $\frac{۲\text{و}^{\text{لا}+\text{ما}}}{\text{لا}^۲+\text{ما}^۲}\left((\text{لا}+۱)-\frac{۲\text{لاما}}{\text{لا}^۲+\text{ما}^۲}\right)$۔

## مشقی سوالات (۲۱) صفحہ ۱۵۳

(۱) ۴، $۲۲\frac{۳}{۴}$، ۷، $\text{مس}^{-۱}۴$، $\text{مس}^{-۱}\,۲۲\frac{۳}{۴}$، $\text{مس}^{-۱}۷$

(۲) ۱، $۴۵^\circ$

(۳) (۲، ۴)، $\left(\frac{۲}{۹}، \frac{۴}{۲۷}\right)$، (۰، ۰)

(۴) (-۱، ۱۰)، (۳، -۲۲)

(۵) (ا) ۳لا + ۸ما = ۲۵، ۸لا - ۳ما = ۱۸، $-\frac{۱۶}{۳}$، $-\frac{۳}{۴}$

(ب) لا جم طہ + ما جب طہ = ر، ما جم طہ - لا جب طہ = صفر، $-\frac{\text{ر جب}^۲\text{طہ}}{\text{جم طہ}}$، - ر جم طہ

(ج) ب لا + ا ما = $\sqrt{۲}$ ا ب، $\sqrt{۲}$(ا لا - ب ما) = $\text{ا}^۲-\text{ب}^۲$،
$-\frac{۱}{۲}\text{ا}\sqrt{۲}$، $\frac{-\text{ب}^۲\sqrt{۲}}{۲\text{ا}}$

(۶) ۱۶

(۷) ۵۴

(۸) $\left(۲\frac{۲}{۳}، ۵۵\frac{۲}{۳}\right)$

(۹) $\text{مس}^{-۱}\frac{۴}{۳}$

(۱۰) ۷لا - ۴ما - ۱۷ = ۰، ۱۸۹لا - ۱۰۸ما - ۲۰۹ = ۰

(۱۱) افقی (± ۲√۳/۳ ، ∓ ۴√۳/۳) ؛ انتصابی (± ۴√۳/۳ ، ∓ ۲√۳/۳)

(۱۲) ۵لا − ۲ما = ± ۹

(۱۳) (± ا√۲/۲ ، ± ب√۲/۲)

(۱۵) (ا) ما = و^{ملا}

(ب) ما^۲ = م لا

(ج) ا لوک ((ا − √(ا^۲ − ما^۲))/ما) + √(ا^۲ − ما^۲) + م

(د) ما^۲ + (لا + ج)^۲ = ا^۲

(۲۱) (ا) (۳ ، ۲) ، (۱ ، −۲) ؛ ۴۵° ؛ (ب) (۴ ، ۵) ، (−۱ ، ۵/۴) ؛ ۳۳ ۹° ، ۱۴۱ ۲۸′

(ج) (۳ ، ۲) ، سس^{−۱} ۳

## ۴ء۲۵ صفحہ ۱۵۸

(۲) فرس/فزلا = ((ا + لا)/لا)^{۱/۲} ، فرس/فزما = ((لا + ا)/ا)^{۱/۲}

(۴) √((اما − لا^۲)^۲ + (الا − ما^۲)^۲) / (اما − لا^۲)

(۵) [ ا√۲/۲ + ا/۲ لوک (۱ + √۲) ]

(۶) ۱۹/۲۷

(۷) ۴ء۹۸

## ۴ء۳ صفحہ ۱۶۰

(۲)

(ا) ۳لا − ۲ما − ۱ = ۰ ، ۲لا + ۳ما − ۵ = ۰ ، ۲/۳ ، ۳/۲

(ب) لا + ۲ ما − ۴ = ۰ ، ۲ لا − ما − ۳ = ۰ ، −۲ ، −۱/۲

(۳) مماس = ما قم ط، عماد = ما قطط، زیر مماس = − ما جم ط، زیر عماد = − ما س ط

(۴) مماس کی مساوات = ب لا + ا ما = √۲ اب، عماد کی مساوات =

√۲ (ا لا − ب ما) = ا² − ب²، زیر مماس = − ۱/ا۲ √۲، زیر عماد = ب²/ا۲ √۲

(۵) ۸ ا

(۶) ۱۲ ا

(۷) (ا) فرس/فرت = √(۱ + ۴ت²)، جب سه = ۲ت/√(۱ + ۴ت²)، جم سه = ۱/√(۱ + ۴ت²)

(ب) فرس/فرت = ت √(۴ + ۹ت²)، جب سه = ۳ت/√(۴ + ۹ت²)، جم سه = ۲/√(۴ + ۹ت²)

## ۴۴ ۔ صفحہ ۱۶۴

(۳) (ا) ۳، ۱/۲ (ب) ۰، √۳، −√۳، صفر (ج) ۰، ∞، ±۱ ۔

(د) ∞، −۱، (۱ + √۳)/(√۳ − ۱)، (√۳ − ۱)/(√۳ + ۱)

(۴) (ا) ۱۳، (ب) √(۲ + ۲ جم ط) (ج) √۱۳

## ۴۵ ۔ صفحہ ۱۶۷

(۳) (ا) ر/ا √(ا² + ر²)، √(ا² + ر²)، ر²/ا، ا، ر²/√(ا² + ر²)

(ب) ر √(۱ + ۱/(لوک ا)²)، ر √(۱ + (لوک ا)²)، ر/لوک ا، ر لوک ا، ر/√(۱ + (لوک ا)²)

(ج) ا/ط √(۱ + ط²)، −ا/ط² √(۱ + ط²)، −ا، −ا/ط²، −ا/√(۱ + ط²)

(۴) °۴۵

(۵) °۹۰

## ۶ء۴ ۔ صفحہ ۱۶۹

(۲) ۱، ۱، −۱ ± ۲ خ

(۳) ۲، ۲، −۱، −۳

(۴) ۱، ۱، −۱، −۱، ۲

(۵) ۰، ۰، ۰، ۱، ۱، ۱/۳

(۶) ۱، ۱، −۱، −۱، ۳

(۷) −۱ ± √۲ خ، −۱ ± √۲ خ، (−۳ ± √−۳۵)/۲

(۸) −۱، −۱، −۱، ۳ ± ۲ خ

(۹) ب² = ۴ ا ج

(۱۰) (ب ج − ۹ ا د)² = ۴ (۳ ب د − ج²) (۳ ا ج − ب²)

## ۷ء۴ ۔ صفحہ ۱۷۳

(۲) (ا) (−۱، −۱) اعظم؛ (۳، −۳۲) اقل

(ب) (۲/√۳ ، −۲(۲)^{۱/۳}/√۳) اقل؛ (−۲/√۳ ، + ۲(۲)^{۱/۳}/√۳) اعظم

(ج) (۱، ۲) اعظم؛ (۲، ۱) اقل

(د) لا = −۱ اعظم؛ لا = ۲ اقل

(۳) (ا) لا = ۱ اقل = ۳

لا = ۲ اعظم = ۳

لا = ۳ اقل = ۳

(ب) لا = -۶ اعظم = صفر

لا = -۳ اقل = -۱۹۶۸۳

لا = ۲ اعظم = ۸۱۹۲

(ج) لا = -ر اعظم = صفر

لا = $-\frac{ر}{۲}$ اقل = $-\frac{۲۷}{۶۴}ر^{۶}$

لا = ر کچھ بھی نہیں

(د) $(\frac{۳}{۲}، ۰)$ اقل، لا = $\frac{۱۵ \pm \sqrt{۱۱۳}}{۸}$ اقل

## ۴۵،۴ - صفحہ ۱۷۶

(۳) لا = -۱ اقل = -۳

لا = ۱ اعظم = ۳

(۴) لا = ۴، اعظم = ۱

لا = ۱۴ اقل = ۲۵

(۵) لا = $\frac{ر}{۴}$ اقل = $\frac{۲۷}{۳۲}ر^{۴}$

(۶) اعظم (۲، ۰) اقل (۰، -۱)

(۷) لا = ۲ اعظم، لا = -۲ اقل

(۸) لا = $\frac{۷\pi}{۶}$ اعظم

= $\frac{۱۱\pi}{۶}$ اقل

(۹) لا = $\frac{۲\pi}{۳}$ اعظم

لا = $\frac{۴\pi}{۳}$ اقل

(۱۰) لا = ۵ اقل

لا = $\frac{۱}{۲}$ اعظم

لا = -۱ اقل

(۱۳) مربع = $\frac{ر}{\sqrt{۲}}$ ، ر ربع کا نصف قطر

(۱۴) $\frac{ک^{۲}}{۸}$

(۱۵) ۰، ۰

(۱۶) لا = $\frac{ر}{۳\pi}$

(۱۷) ۵ فٹ

(۱۸) قاعدہ کا ضلع = ۲۰' گہرائی = ۱۰'

(۱۹) $\frac{\pi}{۴}$

(۲۰) ر = نصف قطر = ۱۰ $\sqrt[۳]{\frac{۴}{۲\pi ۳}}$ = ۶٫۰۶

ل = بلندی = ۱۰ $\sqrt[۳]{\frac{۱۲}{۲\pi}}$ = ۵٫۰۱ حجم = ۳۳۰ مکعب فٹ

## ۶۵ء۴ - صفحہ ۱۸۰

(۳) ن جفت ہو تو منحنی ہر جگہ مقعر - ن طاق ہو تو لا < ۰ محدب،

لا > ۰ مقعر (۰، ۰) نقطۂ انعطاف۔

(۴) (۰، π)، ($\frac{\pi}{۲}$، $\frac{۳\pi}{۲}$) (۰، π): کوئی نقاط انعطاف نہیں

قطر لا مقعر ($-\frac{\pi}{۲}$، $\frac{\pi}{۲}$) محدب ($\frac{\pi}{۲}$، $\frac{۳\pi}{۲}$)

قم لا " (۰، π) محدب (π، ۲π)

(۵) کوئی نقاط انعطاف نہیں - قولا ہمیشہ مقعر اور لوک لا ہمیشہ محدب -

(۶) لا = ۲، $-\frac{۱}{۲}$

(۷) لا = ۰، $\frac{۲}{۳}$

(۸) لا = $\frac{۵}{۴}$

(۹) لا = ا

(۱۰) کوئی نقطہ انعطاف نہیں ہمیشہ مقعر

(۱۱) 〃 〃 〃 محدب

(۱۲) فر² ا / فر لا² = Δ / (ھ لا + ب ا + ف)³

کوئی نقطہ انعطاف نہیں۔

## ۹۱، ۴ - صفحہ ۱۸۵

(۴) ۶۰ میل فی گھنٹہ - ۴۴ ثانیے - ۱۹۳۶ فٹ

(۶) (ا) ت = ۳/۴ ع = −۳۲، و = ۲۴　　ع اسراع، و رفتار

ت = ۳/۲ ع = −۳۲ و = ۰

(ب) ت = ۱/۲، ع = −√۳ ا π² / ۱۸، و = − ا π / ۶

ت = ۱ ع = − ا π² / ۱۸ و = − ا π × √۳ / ۶

ت = ۳/۲ ع = صفر و = − ا π / ۳

(ج) ع = ۴ ب ق^(−۲)، و = −۲ ب ق^(−۲)

(د) ت = ۰، ع = ۰، و = ۲

ت = ۱ ع = −۶، و = −۱

(۱۰) لا = ج و^(±√ھ ت)

(۱۱) لا = ۳ جم ۲ ت، −۶ جب ۱۰ نق، ۴ جم ۱۰ نق

(۱۲) (ا) ۱۶، ۲، ۶۴√۳

(ب) ۳۲، ۲√۲، ۱۲۸

(ج) ۴۸ ، $۲\sqrt{۳}$ ، $۶۴\sqrt{۳}$

## ۹۲،۴ - صفحہ ۱۸۸

(۳) نصف قطر کے بڑھنے کی شرح $= \frac{۱}{۹\pi} =$ ۰۳۵ء۰″ فی ثانیہ

سطح کے " " $= \frac{۱۶}{۳}$ مربع انچ۔

(۴) (ا) ۵ میل فی گھنٹہ (ب) ۲ میل فی گھنٹہ

(۵) ۰۶ء۱ فٹ فی ثانیہ

(۶) $\frac{۱}{۲۵۶}$ اکائیاں فی منٹ گھٹ رہا ہے۔

(۷) (ا) ۸۷۵ء، (ب) ۷۵ء۰،

(۸) $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ = ۵۵ء اکائی فی ثانیہ گھٹ رہا ہے۔ صفر

(۹) $۲۵\pi$ مکعب اکائیاں فی منٹ

(۱۰) ۴ میل

(۱۱) $-\frac{۱۲۸\pi}{۳}$ ، $-\frac{۱۲\pi}{۴\sqrt{۲}}$

(۱۲) $\frac{۱}{۴\pi}$

## مشقی سوالات (۲۲) صفحہ ۱۹۹

(۱) $\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}\frac{\text{لا}^۲}{۲} + \text{ک}$ (۲) $\text{لا}^۴ - \text{لا}^۳ + ۲\,\text{لا}^۲ - ۷\,\text{لا} + \text{ک}$

(۳) $\text{ا}\,\text{لا} - ۲\text{ب}\sqrt{\text{لا}} + \text{ک}$ (۴) $-\frac{\text{لا}^۳}{۳} - ۱۰\,\text{لا} - \frac{۵}{\text{لا}} + \text{ک}$

(۵) $\text{لا} - ۶\sqrt{\text{لا}} + ۳\,\text{لوک}\,\text{لا} + \frac{۲}{\sqrt{\text{لا}}} + \text{ک}$ (۶) $\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}\,\text{لوک}\frac{\sqrt{۲} + \text{لا}}{\sqrt{۲} - \text{لا}} + \text{ک}$

(۷) $\text{لوک}\left\{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^۲ - ۳}\right\} + \text{ک}$ (۸) $\text{جب}^{-۱}\frac{\text{لا}}{۲} + \text{ک}$

(۹) $\text{لوک}\left\{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^۲ + ۹}\right\} + \text{ک}$ (۱۰) $\text{لا}\sqrt{۲۵ - \text{لا}^۲} + ۲۵\,\text{جب}^{-۱}\frac{\text{لا}}{۵} + \text{ک}$

(۱۱) $\text{مس}\,\text{ط} - \text{ط} + \text{ک}$ (۱۲) $\text{لوک}\,(۱ - \text{جم}\,\text{ط}) + \text{ک}$

(۱۳) −۲ جم طہ − طہ + ک (۱۴) $\frac{1}{11}$ لا$^{11}$ + $\frac{1}{\text{لوک } 10}$ (۱۰)$^{\text{لا}}$ + ک

(۱۵) لا + ک

## مشقی سوالات (۲۳) صفحہ ۲۰۹

(۱) $\frac{\text{لا}^3}{4}$ + $\frac{\text{لا}^2}{8}$ + $\frac{\text{لا}}{8}$ + $\frac{1}{16}$ لوک (۲لا − ۱) + ک

(۲) $\frac{1}{3}$ لوک $\frac{\text{لا} + 2}{\text{لا} - 1}$ + ک (۳) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ مس$^{-1}$ $\frac{2\text{لا} - 1}{\sqrt{3}}$ + ک

(۴) لوک $\frac{\text{لا}}{\sqrt{1 + \text{لا}^2}}$ + ک (۵) جب$^{-1}$ (۲لا − ۱) + ک

(۶) ۲ $\sqrt{\text{لا}^2 - 1}$ + لوک (لا + $\sqrt{\text{لا}^2 - 1}$) + ک

(۷) $\frac{1}{2}$ لوک {لا$^2$ − ۳ + $\sqrt{\text{لا}^4 - 6\text{لا}^2 + 5}$} + ک

(۸) ۳ $\sqrt{16 - 5\text{لا} + \text{لا}^2}$ + $\frac{19}{2}$ لوک (لا − $\frac{5}{2}$ + $\sqrt{16 - 5\text{لا} + \text{لا}^2}$) + ک

(۹) $\frac{9}{4}$ جب$^{-1}$ $\frac{2\text{لا} - 3}{2}$ − ۲ $\sqrt{12\text{لا} - 4\text{لا}^2 - 5}$ + ک

(۱۰) $\frac{1}{16}$ لوک $\frac{2\text{لا} - 3}{2\text{لا} + 1}$ − $\frac{1}{8}$ لوک (۴لا$^2$ − ۴لا − ۳) + ک

(۱۱) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ جب$^{-1}$ $\frac{3 - 4\text{لا}}{\sqrt{41}}$ + ک (۱۲) $\frac{2}{3}$ $\sqrt{3\text{لا} + 9\text{لا}^2}$ + ک

(۱۳) $\frac{1}{6}$ (۲ + لا − لا$^2$)$^6$ + ک (۱۴) $\frac{1}{9}$ (لا$^3$ − ۳لا$^2$ + ۳لا − ۱۰)$^3$ + ک

(۱۵) $\frac{1}{2}$ (لوک لا)$^2$ + ک (۱۶) $\frac{1}{2}$ (مس$^{-1}$ لا)$^2$ + ک

(۱۷) $\frac{1}{2}$ طہ − $\frac{\text{جب ۶ طہ}}{12}$ + ک (۱۸) − $\frac{1}{6}$ جم طہ جب$^5$ طہ − $\frac{5}{4 \times 6}$ جم طہ جب$^3$ طہ

− $\frac{3 \times 5}{2 \times 4 \times 6}$ جب طہ جم طہ + $\frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6}$ طہ + ک

(۱۹) $\frac{1}{4}$ جم$^3$ طہ جب طہ + $\frac{1 \times 3}{2 \times 4}$ جم طہ جب طہ + $\frac{1 \times 3}{2 \times 4}$ طہ + ک

(۲۰) ۱/۷ جم^۷ طہ − ۳/۵ جم^۵ طہ + جم^۳ طہ − جم طہ + ک

(۲۱) ۱/۵ جب^۵ طہ − ۲/۳ جب^۳ طہ + جب طہ + ک

## مشقی سوالات (۴۳) صفحہ ۲۲۰

(۱) جب ۲ لا/۴ − لا جم ۲ لا/۲ + ک (۲) (لا^۲ − ۲) جب لا + ۲ لا جم لا + ک

(۳) (لا^۳ − ۳ لا^۲ + ۶ لا − ۶) ق^لا + ک

(۴) ۱/۳۶ {۳ لا (جب ۳ لا + ۹ جب لا) + جم ۳ لا + ۲۷ جم لا} + ک

(۵) لا^۲/۲ (لوک لا)^۲ − لا^۲/۴ لوک (لا^۲/ق) + ک

(۶) ق^لا/۵ (جب ۲ لا − ۲ جم ۲ لا) + ک

(۷) ق^۲لا/۵ (جب لا + ۲ جم لا) + ک

(۸) ق^−لا/۱۰ (۳ جب ۳ لا − جم ۳ لا) + ک

(۹) ۱/(۵)^½ ق^لا جب (۲ لا − مس^−۱ ۲) + ک

(۱۰) لا مس^−۱ لا + لوک ۱/√(۱ + لا^۲) + ک

(۱۱) ۱/۴ (۲ لا^۲ − ۱) جب^−۱ لا + ۱/۴ لا √(۱ − لا^۲) + ک

(۱۲) لا^۳/۳ مس^−۱ لا − لا^۲/۶ + ۱/۶ لوک (۱ + لا^۲) + ک

(۱۳) − ۱/۳۲ (جب ۶ لا/۶ − ۳/۲ جب ۴ لا + ۱۵/۲ جب ۲ لا − ۱۰ لا) + ک

(۱۴) ۱/۶۴ (۱/۷ جم ۷ لا − ۷/۵ جم ۵ لا + ۷ جم ۳ لا − ۳۵ جم لا) + ک

(۱۵) $\frac{۳}{۸}$ لا + $\frac{۱}{۴}$ جب ۲ لا + $\frac{۱}{۳۲}$ جب ۴ لا + ک

(۱۶) جب لا − $\frac{۲}{۳}$ جب$^{۳}$ لا + $\frac{۱}{۵}$ جب$^{۵}$ لا + ک

(۱۷) $\frac{۱}{۸}$ جب$^{۸}$ لا − $\frac{۱}{۱۰}$ جب$^{۱۰}$ لا + ک

(۱۸) $\frac{۱}{۹}$ جم$^{۹}$ لا − $\frac{۳}{۷}$ جم$^{۷}$ لا + $\frac{۳}{۵}$ جم$^{۵}$ لا − $\frac{۱}{۳}$ جم$^{۳}$ لا + ک

(۱۹) $\frac{۱}{۷}$ جب$^{۷}$ لا − $\frac{۱}{۹}$ جب$^{۹}$ لا + ک

(۲۰) − $\frac{۱}{۱۰}$ جب$^{۵}$ لا جم$^{۵}$ لا + $\frac{۱}{۱۲۸}$ ( $\frac{۳}{۲}$ لا − $\frac{۱}{۴}$ جب ۴ لا + $\frac{۱}{۱۶}$ جب ۸ لا ) + ک

## مشقی سوالات (۲۵) صفحہ ۲۳۲

(۱) − $\frac{۳}{۲}$ (۲) − $\frac{۱}{۱۲}$ لوگ ۵ (۳) $\frac{\pi}{۶}$

(۴) لوگ $\frac{۶ + ۴\sqrt{۲}}{۴ - ۲\sqrt{۳}}$ (۵) $\frac{\pi}{۱۲}$ (۶) $\frac{\pi}{۱۰}$ (۷) − $\frac{\pi}{۸}$

(۸) $\frac{\pi}{۳\sqrt{۳}}$ (۹) $\frac{\pi}{۲}$ (۱۰) $\frac{\pi}{۳}$ (۱۱) $\frac{\pi}{۱۲}$ (۱۲) $\frac{۵\pi}{۳۲}$

(۱۳) $\frac{۲۵۶}{۶۹۳}$ (۱۴) $\frac{۳\pi}{۵۱۲}$ (۱۵) $\frac{۲}{۳۵}$ (۱۶) $\frac{۸}{۳۱۵}$

## مشقی سوالات (۲۶) صفحہ ۲۳۶

(۱) $\frac{۲\sqrt{۷}}{۳}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{۱۶}{۳}$ (۴) ۶ (۵) $\frac{۵۲}{۹}$

(۶) $\frac{۱}{۶}$ (۷) $\frac{۱}{۵}$ لوگ $\frac{۳}{۲}$ (۸) $\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۳}$ (۹) ۴$\pi$ (۱۰) $\frac{۱}{۲}\pi$ لو ب

## مشقی سوالات (۲۷) صفحہ ۲۴۱

(۱) $\frac{لا}{ا^۲\sqrt{ا^۲-لا^۲}}+ک$ (۲) $\frac{۱}{۳}$ لوک $\frac{\sqrt{۳لا^۲+۹}-۳}{۲لا}+ک$

(۳) $\frac{۱}{۳لا}\sqrt{لا^۲-۳}+ک$ (۴) $\sqrt{لا^۲-۱۶}-۴\,قط^{-۱}\frac{لا}{۴}+ک$

(۵) $-\frac{۱}{۵لا}\sqrt{۵-لا^۲}+ک$ (۶) لوک $\left(لا+\sqrt{لا^۲-۳۶}\right)-\frac{\sqrt{لا^۲-۳۶}}{لا}+ک$

(۷) $\frac{۱}{۳}$ لوک $\left\{\frac{لا}{۳+\sqrt{۹-لا^۲}}\right\}+ک$ (۸) $-\frac{۱}{لا}\sqrt{۴-لا^۲}-جب^{-۱}\frac{لا}{۲}+ک$

(۹) $\frac{۱}{۹}\,\frac{لا+۲}{لا^۲+۴لا+۷}+\frac{\sqrt{۳}}{۱۸}\,مس^{-۱}\frac{لا+۲}{\sqrt{۳}}+ک$

(۱۰) $-۲\,جب^{-۱}\sqrt{\frac{ا-لا}{ا}}+ک$ (۱۱) $\frac{\pi}{اب}$

(۱۲) $\frac{\pi}{۳\sqrt{۳}}$ (۱۳) $\frac{۲\pi}{۳\sqrt{۳}}$

## ۴ و ۶ ــ صفحہ ۲۴۷-۲۴۹

(۲) (ا) ۰، $\pm\sqrt{۳}$، $\pm۱$

(ب) ۰، ۰، ۶، ۰، ۴

(ج) $\frac{-ب\pm\sqrt{ب^۲-۴اج}}{۲ج}$، $\frac{-ب}{۲ج}$

(د) $\frac{۱}{۴}$، $\frac{۵}{۴}$، $\frac{۳}{۴}$، $\frac{۷}{۴}$ (۰، ۲π کے درمیان)

(ه) ۰، ۱، $\frac{۱}{و}$

(۵) (ا) $\sqrt{\frac{۳۷}{۱۲}}$

(ب) $\frac{۲۸۹}{۶۴}$

(ج) $۰ < \text{لوک}\,(\text{ع} - ۱) < ۱$

(د) $\frac{۱}{\text{لوک}\,۹ - \text{لوک}\,۴} - ۱$

(ہ) $\text{ط} = \frac{۱}{۲} \text{،} \frac{۱}{۲} \text{،}$

(۸) $\frac{\sqrt{۱۰۸} - \sqrt{۱۲}}{\sqrt{۳}} \text{،} \frac{\sqrt{۱۹۲} - \sqrt{۲۱۷}}{\sqrt{۳}}$

## ۳ ، ۶ — صفحہ ۲۵۲-۲۵۳

(۳) $۳(\text{لا} - ۲)^۳ + ۱۳(\text{لا} - ۲)^۲ + ۲۴(\text{لا} - ۲) + ۱۵$

(۴) $\text{لوک}\,(\text{لا} + \text{ہ}) = \text{لوک}\,\text{ہ} + \frac{\text{لا}}{\text{ہ}} - \frac{\text{لا}^۲}{۲\text{ہ}^۲} + \frac{\text{لا}^۳}{۳\text{ہ}^۳} - \frac{\text{لا}^۴}{۴\text{ہ}^۴}$

$\text{لوک}\,(۱ + \text{لا}) = \text{لا} - \frac{\text{لا}^۲}{۲} + \frac{\text{لا}^۳}{۳} - \frac{\text{لا}^۴}{۴}$

(۵) $۵\,\text{لا}^۳ - ۳۴\,\text{لا}^۲ + ۹۴\,\text{لا} - ۱۰۰$

(۶) $\text{لا}^۳ + ۹\,\text{لا}^۲ + ۲۳\,\text{لا} + ۲۲$

(۷) $(\text{لا} - ۱) - \frac{(\text{لا} - ۱)^۲}{۲} + \frac{(\text{لا} - ۱)^۳}{۳} \ldots\ldots$

(۸) $\text{جیب}\,(\text{لا} + \text{ما}) = \text{جیب}\,\text{لا} + \text{ما}\,\text{جم}\,\text{لا} - \frac{\text{ما}^۲}{۲!}\text{جیب}\,\text{لا} - \frac{\text{ما}^۳}{۳!}\text{جم}\,\text{لا} + \frac{\text{ما}^۴}{۴!}\text{جیب}\,\text{لا} \ldots\ldots$

(۹) $\frac{۱}{\text{ل}} - \frac{\text{لا} - \text{ل}}{\text{ل}^۲} + \frac{(\text{لا} - \text{ل})^۲}{\text{ل}^۳} \ldots\ldots$

(۱۰) (ا) $\text{قو}^{\text{ھ}} \left[ ۱ + \text{لا} + \frac{\text{لا}^۲}{۲!} + \frac{\text{لا}^۳}{۳!} + \ldots\ldots \right]$

(ب) $\text{لا}^{\text{م}} + \text{م}\,\text{لا}^{\text{م}-۱}\,\text{ھ} + \frac{\text{م}(\text{م} - ۱)}{۲!}\,\text{لا}^{\text{م}-۲}\,\text{ھ}^۲ + \ldots\ldots$

(۱۲) (ا) $\text{قو}^{\text{لا}} = ۱ + \text{لا} + \frac{\text{لا}^۲}{۲!} + \frac{\text{لا}^۳}{۳!} + \ldots\ldots$

(ب) $\text{لوک}\,(۱+\text{لا}) = \text{لا} - \frac{\text{لا}^۲}{۲} + \frac{\text{لا}^۳}{۳} - \frac{\text{لا}^۴}{۴} + \frac{\text{لا}^۵}{۵} - \ldots\ldots$

(ج) $\text{جب}^{-۱}\,\text{لا} = \text{لا} + \frac{۱\times\text{لا}^۳}{۲\times۳} + \frac{۱\times۳\times\text{لا}^۵}{۲\times۴\times۵} + \ldots\ldots$

(د) $\text{مس}^{-۱}\,\text{لا} = \text{لا} - \frac{\text{لا}^۳}{۳} + \frac{\text{لا}^۵}{۵} - \frac{\text{لا}^۷}{۷} \ldots\ldots$

(ھ) $۱ - \frac{\text{لا}^۲}{۲!} + \frac{\text{لا}^۴}{۴!}$

(و) $\text{مس}\,\text{لا} = \text{لا} + \frac{\text{لا}^۳}{۳} + \frac{۲\,\text{لا}^۵}{۱۵} + \frac{۱۷}{۳۱۵}\,\text{لا}^۷$

(ز) $\text{قط}\,\text{لا} = ۱ + \frac{\text{لا}^۲}{۲} + \frac{۵\,\text{لا}^۴}{۲۴} + \frac{۶۱}{۷۲۰}\,\text{لا}^۶ + \ldots\ldots$

## ۴ء۶ - صفحہ ۲۵۶

(۲) (ا) لا = ۴ اقل = ۹

لا = ۲ اعظم = ۱۳

(ب) لا = ۰ کوئی قیمت نہیں

لا = ۳ اقل = −۲۲

(ج) لا = −۱ پر کچھ نہیں۔

(د) لا = $\frac{۹}{۵}$ اعظم = ۱۱ء۱

لا = ۲ اقل = صفر

لا = ۰ پر کچھ نہیں

(ھ) لا = $\frac{\pi}{۳}$ اعظم اور لا = $\pi$ پر کچھ نہیں۔

لا = $-\frac{\pi}{۳}$ اقل

(و) لا = ۰ اقل

(ز) لا = ۰ اعظم = صفر

(ح) لا = $\frac{\pi}{۲}$ اقل لا = $جب^{-1} \frac{۳}{۸}$ اعظم

(ط) لا = جم لا اعظم

(ی) لا = ۰ اقل ..... (آخری رقم + ۲۱۶ $لا^{۲}$)

(ک) لا = ۰ اقل

(ل) لا = ۰ پر کچھ نہیں

(م) لا = $\frac{۱}{ھ}$ اقل

(ن) لا = ± $\frac{\pi}{۳}$ اعظم و اقل

(س) لا = ۲ پر کچھ نہیں۔

# غیر معیّن شکلیں

۵ ء ۱۷ — صفحہ ۲۵۸-۲۵۹

(ا) $\frac{۱}{۹}$

(ب) $\frac{۱}{ن لو ت - ۱}$

(ج) $\frac{۳}{۲}$

(د) $-\frac{۱}{۳}$

(ہ) $-\frac{۲۹.۶}{۹}$

(و) $\frac{۱}{۲}$

(ز) ۱

(ح) ۱

(ط) $-\frac{۱}{۸}$

(ی) لوک $\frac{د}{ب}$

(ک) صفر

(ل) $\frac{۱}{۲}$

(م) $\infty$

(ن) $-\frac{۱}{۲}$

**۲ ۵ و ۶ ۔ صفحہ ۲۶۱-۲۶۴**

(۳) صفر

(۴) صفر

(۵) $-\infty$

(۶) $\frac{۳}{۵}$

(۷) صفر

(۱۰) $\frac{۴}{\pi}$

(۱۱) $-۲$

(۱۲) صفر

(۱۳) $\frac{۱}{۳}$

(۱۴) ۱

(۱۵) ۱

(۱۶) $\frac{\pi^{۲}}{۴}$

(۱۷) صفر

(۱۸) $-\frac{۱}{۴}$

(۱۹) $-۱$

(۲۳) و

(۲۴) ۱

(۲۵) $\frac{۱}{و}$

(۲۶) ۱

(۲۷) $و^{۲}$

(۲۸) ۱

(۲۹) $و^{\frac{۲}{۳}}$

(۳۰) $\frac{۱}{و}$

(۳۱) $\frac{۱}{۲}$

(۳۲) و

(۳۳) $و^{-\frac{ن م^{۲}}{۲}}$

## ۶ ء ۶ — صفحہ ۲۶۶

(۲) تیسرے اور پانچویں رتبہ کا تماس

(۳) دوسرے اور چھٹے رتبہ کا تماس

(۴) دوسرے رتبہ کا تماس مبداء پر

(۵) دوسرے رتبہ کا تماس مبداء پر

(۶) تیسرے رتبہ کا تماس مبداء پر

## ۶ ء ۸ — صفحہ ۲۶۳-۲۶۵

(۲) عہ = -۴، بہ = $\frac{۸}{۳}$ ر = $\frac{۵}{۳}\sqrt{۱۰}$

عہ = ۱۴۳، بہ = $\frac{-۲۴۱}{۱۲}$ ر = $-\frac{۱۴۵}{۲}\sqrt{۱۴۵}$

عہ = $\frac{۷}{۶۴}$، بہ = $\frac{۳۱}{۴۸}$ ر = $\frac{۱۲۵}{۹۲}$

(۳) عہ = -۱ بہ = $\frac{۵}{۲}$ ر = $۲\sqrt{۲}$

ع = ۸ ، ب = ۷ ، س = ۵√۵

(۴) ع = (ا² − ب²)/ا ، ب = ۰ ، س = ب²/ا

ع = (ا² + ب²)/ا ، ب = ۰ ، س = ب²/ا

(۵) ع = ۰ ، ب = ب − ا²/۳ب ، س = ا²/(−۳ب)

(۷) ع = ۳ ، ب = −۴ ، س = −۶

(۸) ۳۹/۸

(۱۰) (±۱ ، ۰) س = −۱/۴ ، ۱/۸

(۱۱) ۱۳۹ ؛ ±

(۱۲) ع = (ا² − ب²) لا³/ا⁴ ، ب = −(ا² − ب²) ما³/ب⁴

(الا)^(۲/۳) + (ب ما)^(۲/۳) = (ا² − ب²)^(۲/۳)

(۱۳) ع = −۴لا³ ، ب = ۳لا² + ۱/۲ ، س = (۱ + ۴لا²)^(۳/۲)/۲

(۱۴) ع = (ا² + ب²) لا³/ا⁴ ، ب = −(ا² + ب²) ما³/ب⁴ ، س = (ا⁴ ما² + ب⁴ لا²)^(۳/۲)/ا⁴ب⁴

(۱۵) ع = لا + ۳ لا^(۲/۳) ما^(۱/۳) ، ب = ما + ۳ لا^(۱/۳) ما^(۲/۳) ، س = −۳ (الا ما)^(۱/۳)

(۱۶) ع = −۸ت³ ، ب = ۶ت² ، س = (۱ + ۴ت²)^(۳/۲)

(۱۷) ع = ۱ + ت − ت⁵/۴ ، ب = ۲/ت + ۵ت³/۶ ، س = (ت⁴ + ۴)^(۳/۲)/۴ت³

(۱۸) ع = −۲ جم طہ جم طہ ، ب = طہ + جم طہ + جم² طہ ، س = (۱ + جم² طہ)^(۳/۲)/جیب طہ

(۱۹) ع = −(۱ − جم طہ) ، ب = طہ + جیب طہ ، س = ۲ جب طہ/۲

(۲۰) ع = لا − مس لا ، ب = ما + ۱ ، ر = قظ لا

(۲۱) $(\text{لا} + \text{ما})^{\frac{۲}{۳}} - (\text{لا} - \text{ما})^{\frac{۲}{۳}} = ۲\,\text{ر}^{\frac{۲}{۳}}$

(۲۲) $\text{ع} = \text{لا} + \frac{\text{ر}^{۲}\left(۱ + \frac{۹\,\text{ما}^{۴}}{\text{ر}^{۴}}\right)}{۶\,\text{ما}}$ ، $\text{ب} = \text{ما} - \frac{\left(۱ + \frac{۹\,\text{ما}^{۴}}{\text{ر}^{۴}}\right)\text{ما}}{۲}$

$\text{ر} = \frac{\text{ر}^{۲}\left\{۱ + \frac{۹\,\text{ما}^{۴}}{\text{ر}^{۴}}\right\}^{\frac{۳}{۲}}}{-۶\,\text{ما}}$ ، ∞ ، ۰ ، ∞

# صحت نامہ

## تفرقی و تکملی احصاء

| صفحہ | سطر | غلط | صحیح |
|---|---|---|---|
| ۷ | ۴ | کہم ممتلث | ہم مان |
| ۱۶ | ۱۲ | $\frac{ں\,(ن+1)}{2}$ | $\frac{ن\,(ن+1)}{2}$ |
| ۲۳ | ۱۶ | ۱۰۰ ‾۱۰ | ۱۰۰۰ ‾۱۰ |
| ۳۷ | ۱۳ | $\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4ں^2}\right)$ | $\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4ن^2}\right)$ |
| ۴۴ | ۱۰ | آو | آور |
| ۴۷ | ۲ | ا ، ۳ | ا ، ۲۳ |
| ۵۲ | ۱۸ | $\vert صہ_1 + صہ_2$ | $\vert < صہ_1 + صہ_2$ |
| ۵۸ | ۴ | لالا | ۱۱ لا |
| ۸۲ | ۳ | صحیح ۲٫۷۱۸۲۸۱۸۲۸۵... | |
| 〃 | ۹ | تقربی | تقریبی |
| ۸۴ | ۸ | $\left(1-\frac{1}{ن}\right)^{ن}$ | $\left(1+\frac{لا}{ن}\right)^{ن}$ |
| ۸۵ | ۱۲ | صحیح ۲٫۷۱۸۲۸۱۸... | |

| صفحہ | سطر | غلط | صحیح |
|---|---|---|---|
| ۸۶ | ۱۳ | نو | فو |
| ۸۹ | ۱۸ | لو | نو |
| ۹۱ | ۱۰ | عدو | عدد |
| ۱۰۵ | ۸ | کرینکے | کرینگے |
| ۱۲۰ | ۱۷ | جم (۲ لا + ۲) | جم (۳ لا + ۲) |
| ۱۳۲ | ۱۲ صحیح | $\frac{فلا}{لا\sqrt{لا^2-25}}$ ، $\frac{فلا}{2لا\sqrt{4لا^2-9}}$ ، $\frac{فلا}{لا\sqrt{لا^2-12}}$ | |
| 〃 | ۱۳ 〃 | $\left(-3\ \frac{1}{لا\sqrt{5لا^2-3}}\right)$ زلا | |
| ۱۴۸ | ۹ | $(طہ^2\ ۵^2)$ | $(طہ^2\ ا^2)$ |
| ۱۴۹ | ۷ | دارو مدلو | دارو مدار |
| ۱۷۳ | ۲۰ | $\frac{1}{2}لا^3$ | $\frac{1}{3}لا^3$ |
| ۱۷۷ | ۵ | فاصلوں کا مربع | فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ |
| 〃 | ۲۴ | کلیتاً ویر | کلیتاً اوپر |

| صفحہ | سطر | غلط | صحیح | صفحہ | سطر | غلط | صحیح |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱۸۳ | ۱۶ | رفتا۔ | رفتار | ۲۵۴ | ۴ | ا ٹیلر | ٹیلو |
| ۱۹۲ | آخری سطر | ۱ | ۱- | ۲۵۶ | ۱۴ | + - ۱۶ ۲ لا | + ۱۶ ۲ $\text{لا}^2$ |
| ۱۹۸ | 〃 | ہر تفاعل | ہر تکملہ | ۲۶۴ | ۳ | (جم لا) جب لا | (مم لا) جب لا |
| ۲۰۱ | ۳ | فرلا = فرلا / فرما | فرلا = فرلا / فرما فرما | ۲۷۳ | ۱۲ | لا + | لا - |
| ۲۵۰ | ۹،۷،۲۱ | اٹیلر | ٹیلر | 〃 | ۱۲ | ما - | ما + |
| ۲۵۱ | ۶ | اٹیلو | ٹیلر | | | | |